# 전염병 모델

— 박춘재

1. 도입

Calculus는 자연 현상을 기술하는 언어를 제공한다. 그 예로 전염병이 퍼져나가는 추이를 수학적으로 modelling해서 정량적인 분석과 예측을 하는 작업을 해 보자. 전염병마다 복잡하고 다양한 전염양상을 가지지만, 단순하게 다음 가정을 만족하는 전염병만을 생각해 보자.

- 병의 증상이 치명적이지 않고 병에 걸린 사람은 일정기간후 회복된다.
- 병에서 회복된 사람은 영구면역을 갖는다.
- 분석하려는 인구집단은 충분히 큰 수이며 일정한 지역내에 거주하고 있다.

위의 가정을 만족하는 예로 큰 도시의 초등학교 어린이들 사이에 홍역이 발생해서 전염되고 있는 상황을 생각하면 되겠다.

홍역환자가 발생한 도시의 학생들은 다음 세 부류로 나뉜다.

- Susceptible : 홍역에 걸릴 감수성이 있는 학생들
- Infected : 홍역을 앓고 있는 학생들
- Recovered : 홍역에서 회복되었거나 홍역에 면역이 있는 학생들

각 집단의 수를 각각 $S, I, R$ 이라 하면 $S, I, R$ 은 시간에 따른 함수이다. 자 이제 $I$는 언제 최대값을 가

질 것인가? $S$는 시간이 많이 지난 후 0이 될 것인가? 하는 등등의 질문을 해 보자.

2. 수학적 모델링 : SIR 모델

   지금의 $S$값$S(0)$를 알고 있을 때, 1일 뒤의 $S$값 $S(1)$을 아는 것은 $S(1) - S(0)$, 즉 평균 변화율을 아는 것과 같다. 또 $S(1) = S(0) + \int_0^1 S'\,dt$ 이므로 $S(1)$을 아는 것은 $t$는 0부터 1까지 $S'(t)$를 아는 것과 같다.

   정리하면, $S, I, R$의 초기값을 알 때, $S, I, R$의 변화되는 값을 알려면 $S, I, R$의 시간에 따른 변화율 $\frac{dS}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dR}{dt}$을 알면 된다.

   (a) $R$의 변화율에 대한 근사

   $\frac{dR}{dt} \approx \frac{\Delta R}{\Delta t} \approx R(t) - R(t-1) =$ 하루동안 회복된 학생의 수

   홍역에 걸린 학생이 회복되는데 걸리는 평균시간이 예를 들어 14일 이라 하자. 그러면 하루동안 회복되는 학생수는 $I$의 1/14정도로 생각할 수 있다. 따라서 $\frac{dR}{dt}(t) = 1/14I(t)$쯤으로 근사할 수 있겠다.

   *Remark : 매일 감염되는 학생수가 다른데 오늘 회복되는 학생수는 14일전에 감염된 학생수라고 하는게 더 정확할 지도 모른다. 하지만 model이 불완전하다고 낙심 할 것은 없다. 우리의 목적은 전염추이에 대한 통찰과 어떻게 전염에 대한 조치를 취할 것인지를 알아보는데 있다. model은 불완전할지라도, 현실을 어느정도 반영 하*

*면서 simple하면 의미가 있다. 만약 모델이 마음에 들지 않는다면 좀더 현실을 반영하는 model로 개선할 수도 있지만 model이 복잡해지는 비용을 고려해야 할 것이다.*

(b) $S$의 변화율에 대한 근사

$$\frac{dS}{dt} \approx \frac{\Delta S}{\Delta t} \approx S(t) - S(t-1) = -(\text{하루동안 감염되는 학생의 수})$$

감수성이 있는 학생 한명이 하루에 만나는 감염자의 수는 $I$에 비례한다. 그 비를 $p$라 하면, 감수성이 있는 학생 한명당 하루에 $pI$의 감염자를 만난다면 하루동안 이루어지는 감수성집단과 감염자집단의 접촉수는 $pSI$가 될 것이다. 접촉당 $q$정도의 비율로 전염이 이루어진다면, 하루동안 감염되는 학생의 수는 $qpSI$이다. 정리하면 감염되는 학생수는 $S$와 $I$의 곱 $S \cdot I$에 비례한다. 그러므로 $\frac{dS}{dt} \approx -aSI$로 근사할 수 있겠다. ($p, q$는 과거의 data나 실험치 or 추정치를 이용한다.)

(c) $I$의 변화율에 대한 근사

$\frac{dS}{dt} = -aSI, \frac{dR}{dt} = bI$로 두면 $S + I + R$은 일정하므로,

$$\frac{dR}{dt} = -(\frac{dS}{dt} + \frac{dR}{dt}) = aSI - bI$$

($a$를 전이계수, $b$를 회복계수하 부른다.)

3. SIR 모델 방정식의 풀이

5만명의 어린이 집단에 홍역이 전염되고 있는 상황을 생각해 보자. 회복계수 $b = 1/14$, 전이계수 $a = 0.00001$이며 현재 2100명의 환자와 2500명의 면역획득자가 있다 하자. 이 상황을 SIR모델로 모델링하면 다음과 같은 미분방정식(정확히는 초기치 문제)을 얻는다.

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{dS}{dt} = -0.00001SI \\ \frac{dI}{dt} = 0.00001SI - 1/14I \\ \frac{dR}{dt} = 1/14I \\ S(0) = 45400, I(0) = 2100, R(0) - 2500\end{gathered}}$$

이 초기치문제를 만족하는 함수 $S(t), I(t), R(t)$를 찾는것은 (표현을 찾는것은) 매우 어려운 문제에 속한다. 근사적인 해를 찾는 방법을 살펴보자. 하루뒤의 $S$의 수 $S(1)$을 구해 보면,

$S(1) = S(0) + \int_0^1 \frac{dS}{dt}dt \approx S(0) + \frac{dS}{dt}(0) = S(0) - 0.00001S(0)I(0)$

$= 45400 - 0.00001 \cdot 45400 \cdot 2100 = 44446.6$

위에서 $\int_0^1 \frac{dS}{dt}dt \approx \frac{dS}{dt}(0)$으로 근사했다.

다음, $I(1)$과 $R(1)$을 같은 방법으로 구할 수 있다.

$I(1) \approx I(0) + \frac{dI}{dt}(0) = I(0) + 0.00001S(0)I(0) - 1/14I(0) = 2903.4$

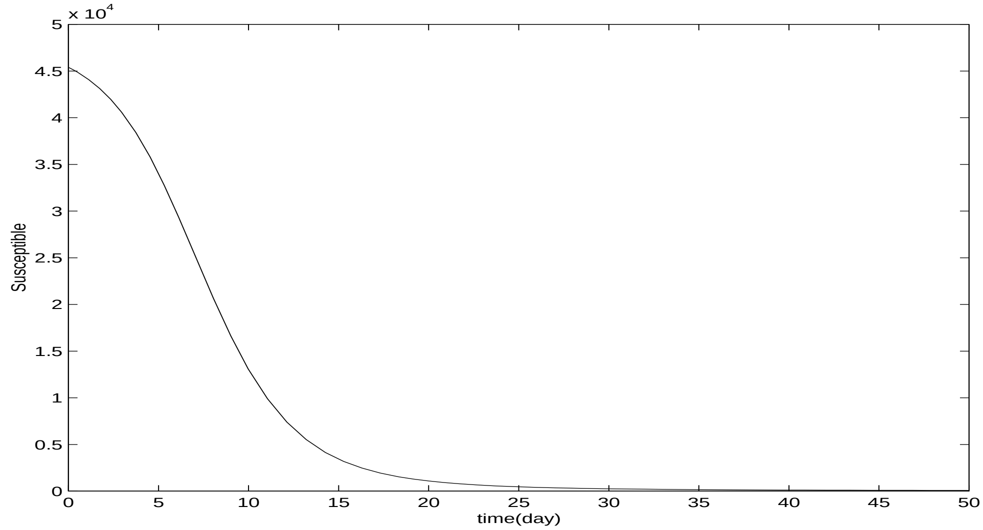
$R(1) \approx R(0) + \frac{dR}{dt}(0) = R(0) + 1/14I(0) = 2650$

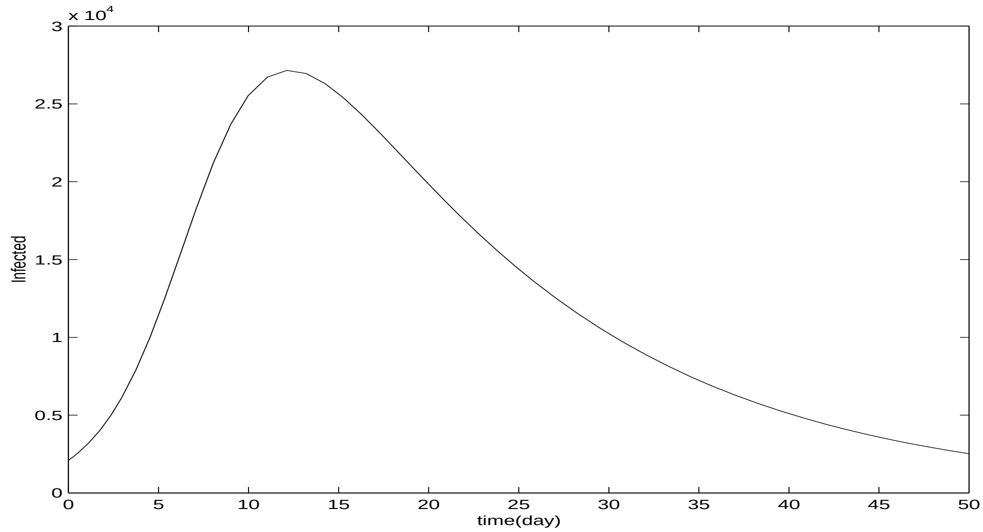
일반화하면 $S(n), I(n), R(n)$을 알 때,

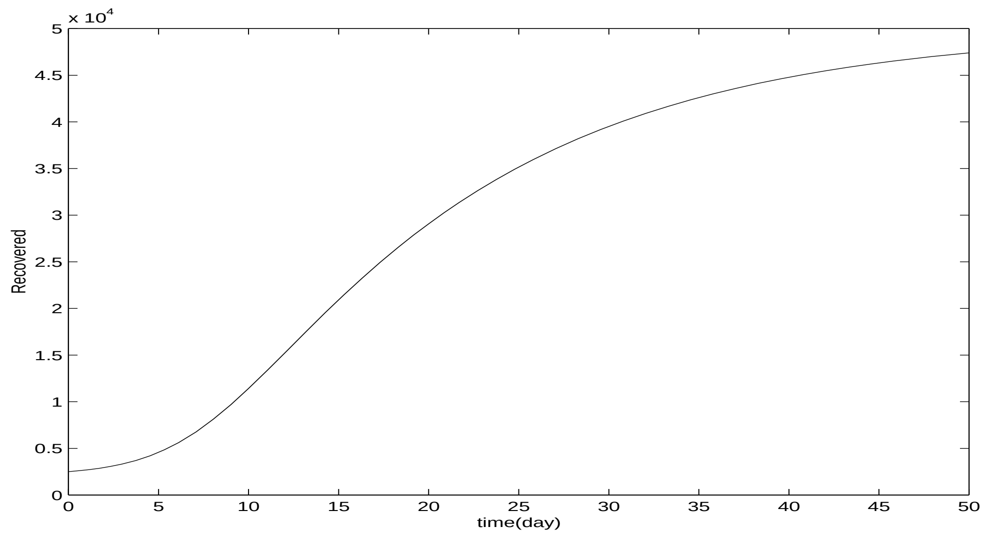
$S(n + 1) \approx S(n) - 0.00001S(n)I(n)$

$I(n + 1) = I(n) + 0.00001S(n)I(n) - 1/14I(n)$

$R(n+1) = R(n) + 1/14I(n)$
으로 $S(n+1), I(n+1), R(n+1)$을 구할 수 있다. 여기서는 하루 간격으로 순차적으로 계산을 해 나갔는데, 시간 간격을 작게 해서 순차적으로 계산을 해 나가면 좀 더 참해와 가까운 결과를 얻을 수 있을 것이다. 다음은 적당한 시간간격으로 쪼개 순차적으로 계산해서 얻은(물론 순차적인 계산은 컴퓨터를 이용했다) $S(t), I(t), R(t)$의 graph이다.






4. 정성적 분석

해를 직접 계산하지 않고 방정식으로부터 직접 해에 대한 분석을 하는 것을 정성적 분석이라 한다. 정성적 분석의 예로서 SIR모델의 분계점(threshold)을 관찰해 보자.

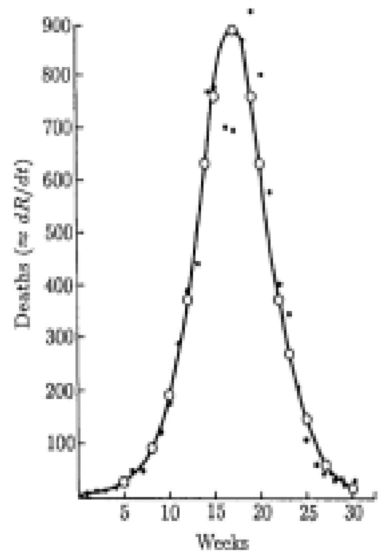
$\dfrac{dI}{dt}(0) = aS(0)I(0) - bI(0) = I(0)(aS(0) - b) < 0$이

라 하자. 즉, $S(0) < \frac{b}{a}$라 하자. $S$는 감소함수이므로(Why?) $S(0) < \frac{b}{a}$이면 항상 $S(t) < \frac{b}{a}$이어서 $\frac{dI}{dt} = I(aS - b) < 0$ 이다. 즉, $I$는 감소함수가 된다.

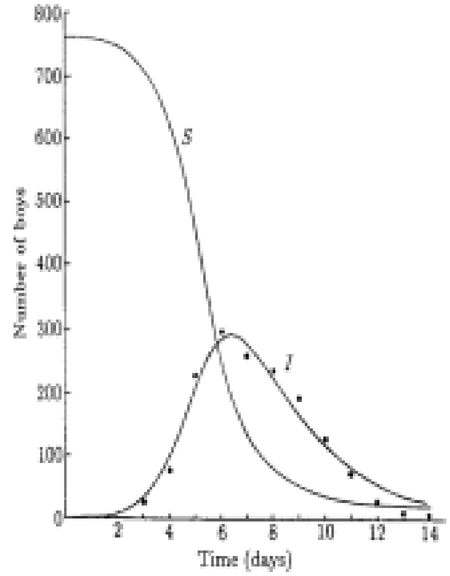
다시 말해 $S$의 초기치 $S(0)$보다 $\frac{b}{a}$가 크면 전염은 일어나지 않는다. 반대로 $S(0)$보다 $\frac{b}{a}$가 작으면 $\frac{dI}{dt}(0)$이 양수이므로 전염이 일어난다. 이 경계를 분계점이라 한다.

5. SIR모델을 이용한 몇가지 분석 사례들

   (a) kermark-Mckendrick이 1927년에 1906-7년까지의 Bombay에 창궐했던 흑사병에 대한 data를 SIR 모델로 분석 비교했던것이 전염병에 대한 수학적 모델링 작업의 시작이었다고 할 수 있다. 다음은 그들이 분석했던 결과중의 한 graph이다. 여기서 R은 Recover 대신 Remove이고 (사망도 영구면역) $\bullet$은 실제 data, $\circ$ 는 SIR모델의 수학적 분석 결과이다.




(b) 다음은 Birtish Medical Journal, 4th March 1978 에 실렸던 독감 data분석 결과이다. 763명 규모의 학교에 퍼졌던 독감 data를 SIR모델로 분석했는데, $S(0) = 762, I(0) = 1, b/a = 202, b = 2.18 \times 10^{-3}$ /day 였다.




6. 전염병 모델은 이 밖에도 SIRS모델, SIS모델들이 있는데 관찰하는 전염병에 따라 여러 모델들이 있다.

   변수분리법을 공부한 뒤에 SIR모델에 대한 정성적 분석을 좀 더 살펴 보기로 하자.