< 반복법(Iteration Method) >

$Ax = b$ 를 풀기 위한 반복법 연구

- 벡터의 내적 :

벡터 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^t$

정의 : $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > \; = \; x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \; = \; < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} > \; = \; \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{y} \; = \; \boldsymbol{y}^t \boldsymbol{x}$

$* \; < A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > \; = \; \boldsymbol{y}^t A \boldsymbol{x} \; = \; \boldsymbol{x}^t A^t \boldsymbol{y} \; = \; < \boldsymbol{x}, A^t \boldsymbol{y} >$

- 벡터의 크기 :

정의 : $\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \; = \; \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >}$, 즉 $\| \boldsymbol{x} \|^2 \; = \; < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >$

- 단위 벡터

벡터 $\boldsymbol{x}$ 방향의 단위벡터 : $\boldsymbol{u}_x \; = \; \dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 크기 1인 벡터, ($\boldsymbol{x} \; = \; \|\boldsymbol{x}\| \boldsymbol{u}_x$)

- 행렬의 크기 (행렬 A의 스펙트랄크기)

정의: $\| A \| = \max_{\|u\|=1} \| Au \|$

$x \neq 0$일 때, $\| Ax \| = \| A(\|x\| u_x) \| = \|x\| \| Au_x \|$,

즉 $\| Au_x \| = \dfrac{\| Ax \|}{\|x\|}$

그러므로

$$\| A \| = \max_{\|u\|=1} \| Au \| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\|x\|}$$

모든 벡터 x 에 대하여 $\| Ax \| \leq \| A \| \cdot \|x\|$

* $\| Ax \| = \sqrt{< Ax, Ax >} = \sqrt{x^t A^t Ax}$

- 고유치와 고유벡터(Eigenvalue and Eigenvector)

$Ax = \lambda x$ 를 만족하는

실수 λ와 벡터 x를 고유치와 그에 대응하는 고유벡터라 한다.

- 행렬 A의 크기와 고유치의 관계

λ를 A^tA의 고유치라 하면, 즉, $A^tAx = \lambda x$ $(\lambda > 0)$

=> $\|Ax\| = \sqrt{< Ax, Ax >} = \sqrt{x^t A^t A x} = \sqrt{\lambda x^t x} = \sqrt{\lambda}\,\|x\|$

=> $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda}\,|\,\lambda$ 는 $\mathrm{A}^t\mathrm{A}$ 의 고유치$\} = \sqrt{\rho(\mathrm{A}^t\mathrm{A})}$

만약 A가 대칭행렬이면

$\|A\| = \max\{\lambda\,|\,\lambda$ 는 A 의 고유치$\} = \rho(\mathrm{A})$

- 조건상수(Condition number)

정의 : $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1$

$(\because)$ $\boldsymbol{x} \neq 0,$ $\|\boldsymbol{x}\| = \|AA^{-1}\boldsymbol{x}\| \leq \|A\|\,\|A^{-1}\boldsymbol{x}\| \leq \|A\|\,\|A^{-1}\|\,\|\boldsymbol{x}\|$

조건상수가 작을수록 반복법의 반복회수가 줄기 때문에 좋은 조건

* $f(x) = 1000x$ 와 $g(x) = x$ 에서 $x - \overline{x} = 1$ 이라고 하면

$f(x - \overline{x}) = 1000$ 이고 $g(\overline{x - x}) = 1$ 이 된다.

$a = 1000$ 과 1 에서 $a = 1000$ 일 때, x 가 조금만 변해도

함숫값이 많이 변화한다.

* 조건상수가 $\kappa(A)$ 가 크면 클수록, $\|\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}\|$ 가 작더라도

$\|\boldsymbol{b} - A\overline{\boldsymbol{x}}\| = \|A(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})\|$ 가 크게 될 수 있다.

- 근사해와 조건상수의 관계

$Ax = b$ **에서** x는 정해이고, $\overline{x}$는 근사해라고 하자.

상대오차 $\dfrac{\|x - \overline{x}\|}{\|x\|} \le \kappa(A) \dfrac{\|b - A\overline{x}\|}{\|b\|}$ 상대잉여오차.

증명)

먼저 $\|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$ 이다.

$$\frac{\|x - \overline{x}\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}A(x - \overline{x})\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\,\|Ax - A\overline{x}\|}{\|x\|}$$

$$\le \frac{\|A^{-1}\|\,\|b - A\overline{x}\|}{\|x\|}\frac{\|A\|}{\|A\|} \le \kappa(A)\frac{\|b - A\overline{x}\|}{\|b\|}$$

< 반복법 >

행렬 $A = N - P$로 분해하면, 이 때, N의 역행렬은 존재.

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 해를 구하는 것은

$N\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$의 해를 구하는 것과 동치이고

$\boldsymbol{x} = N^{-1}P\boldsymbol{x} + N^{-1}\boldsymbol{b}$의 해를 구하는 것과 동치이다.

- **반복식** : 초기 벡터 $\boldsymbol{x}_0$가 주어 질 때,

$$\boldsymbol{x}_k = N^{-1}P\boldsymbol{x}_{k-1} + N^{-1}\boldsymbol{b}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

or) $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_{k-1} + N^{-1}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_{k-1})$

- 행렬 $A = N - P$로 분해하는 방법에 따라 여러 가지 반복법이 있다.

Jacobi method, Gauss-Seidel method, SOR method

< 수렴성 >

$\|N^{-1}P\| < 1$ 이면 위의 반복식 x_k 는

$Ax = b$ 의 해에 수렴한다.

(증명)

$$\begin{aligned}
\|x - x_k\| &= \|(N^{-1}Px + N^{-1}b) - (N^{-1}Px_{k-1} + N^{-1}b\| \\
&= \|N^{-1}P(x - x_{k-1})\| \\
&\leq \|N^{-1}P\| \cdot \|x - x_{k-1}\| \\
&\leq \|N^{-1}P\|^{k} \cdot \|x - x_0\|
\end{aligned}$$

$\|N^{-1}P\| < 1$ 이므로

$$\lim_{k \to \infty} \|x - x_k\| = 0.$$

< Jacobi Method >

$A = N - P, \quad N = D$ (주 대각행렬), $\quad P = N - A$

반복식

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_{k-1} + D^{-1}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_{k-1})$$

여기서 D^{-1} 는 매우 쉽게 계산될 수 있다.

$$D(i,j) = \begin{cases} A(i,i) & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$D^{-1}(i,j) = \begin{cases} \dfrac{1}{A(i,i)} & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$$

- 수렴속도가 느리기 때문에 많은 반복이 필요하다.

< Gauss-Seidel Method >

$A = N - P, \quad N = D + L$ (하삼각행렬), $\quad P = N - A$

반복식

$$x_k = x_{k-1} + (D+L)^{-1}(b - Ax_{k-1})$$

여기서, $z_k = (D+L)^{-1}(b - Ax_{k-1})$라고 두면

$Lz_k = b - Ax_{k-1}$이고 $D+L$이 하삼각행렬이므로

대입법으로 z_k를 찾을 수 있다.

- Jacobi method 보다는 더 개선되었고 수렴속도가 조금 더 빠르다.
- 반복법의 중지시간은 상대잉여오차가 오차한계에 도달할 때 멈춤

$$\frac{\|b - Ax_k\|}{\|b\|} < \rho, \quad \text{(e.g.) } \rho = 10^{-10}$$

< SOR Method : successive over relaxation method >

Gauss-Seidel법을 개선한 방법으로

완화변수(relaxation parameter) ω $(0 < \omega < 2)$를 선택

반복식

$$\boldsymbol{x}_k = (1-\omega)\,\boldsymbol{x}_{k-1} + \omega\, GS(\boldsymbol{x}_k)\ ,$$

여기서, $GS(\boldsymbol{x}_k)$ 는 Gauss-Seidel 반복이다.

- 위 식은 아래와 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_{k-1} + \omega\,(D+\omega L)^{-1}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_{k-1})$$

- $D+\omega L$ 도 역시 하삼각행렬이므로 대입법을 사용하여 아래를 계산

$$(D+\omega L)^{-1}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_{k-1})$$

< Example > 세가지 반복법의 프로그램을 완성하라.

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,, \qquad A = \mathrm{diag}(-1,\,2,\,-1)$$

```
>> n = 1000;
>> A= -diag(ones(n-1,1),-1)+2*diag(ones(n,1))-diag(ones(n-1,1),1);
>> x = myrand(n,1,0,10);   % 무작위로 정해를 선택
>> b = A*x;                 % b를 결정
>> x_mat = A \ b;           % Matlab solution
>> tol = 1.0e-10;
>> [x_J, nJ] = Jacobi(A,b,tol);
>> [x_G, nG] = GS(A,b,tol);
>> [x_S, nS] = SOR(A,b,tol);
```

- 각각의 반복수와 오차를 비교하여 보라.