< 비선형시스템의 반복법(Iteration Method) >

$F(x) = 0$ 의 해를 찾기 위한 반복법 연구

- Newton Method(뉴톤법) : 비선형방정식 $f(x) = \sin x + x^2 + 3 = 0$

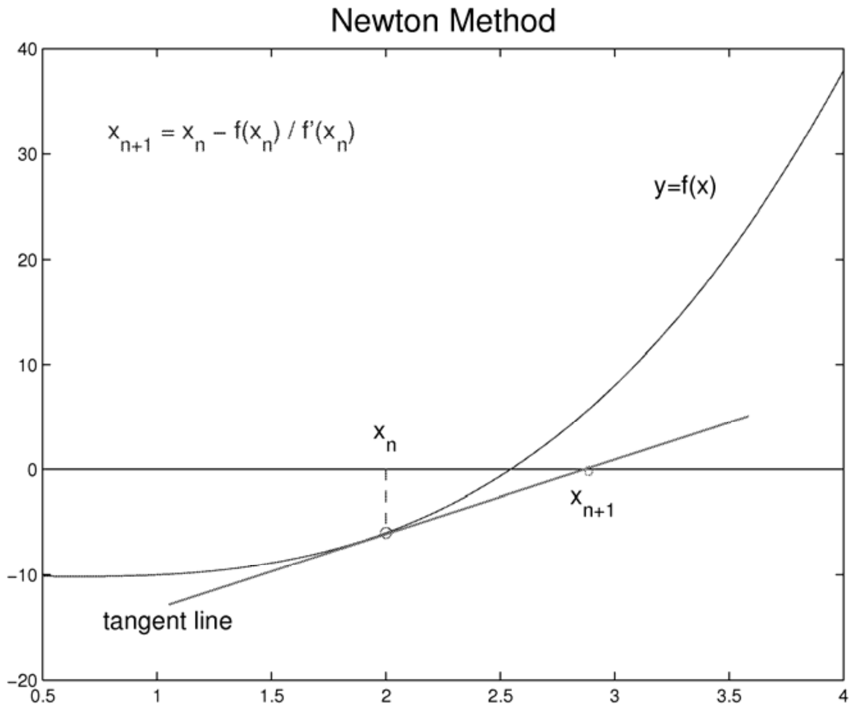
제 n번째 반복인 $x = x_n$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 접선의 x-절편을 다음 반복으로 잡는 방법 :

접선 : $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$

$(x_{n+1}, 0)$ 대입하면

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$: 뉴톤반복

$f'(x_n) \cdot \Delta x_n = -f(x_n), \; x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$



< 비선형 연립방정식(시스템)의 뉴톤반복법 >

- 다변수 함수의 편미분 : $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) : R^n \to R$

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_{1,} \cdots, x_k + h, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{h}$$

f 의 미분(or gradient) :

$$f' = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

e.g., $f(x, y) = x^2 y + e^x \sin y$

=> $f' = (2xy + e^x \sin y,\ x^2 + e^x \cos y)$

- 벡터함수의 미분 : $X(t) = (\, x(t), y(t), z(t)\,) : R \longrightarrow R^3$

$$X'(t) = \frac{dX}{dt} = (\, x'(t), y'(t), z'(t)\,)$$

- 합성함수의 미분 $g(t) = f(X(t)) : R \longrightarrow R$

$$g'(t) = \frac{dg}{dt} = f'(X(t)) \cdot X'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} z'(t)$$

e.g., $f(x,y) = xy + e^x \sin y$, $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$

=> $$\frac{df(X(t))}{dt} = (y + e^x \sin y)(-\sin t) + (x + e^x \cos y)\cos t$$

$$= (\sin t + e^{\cos t} \sin(\sin t))(-\sin t) + (\cos t + e^{\cos t} \cos(\sin t))$$

- 다변수 벡터함수의 미분

$$F(X) = F(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{bmatrix} \ : R^3 \to R^3$$

F의 미분 $J(F) = F'$ 을 F의 야코비행렬(Jacobi matrix)

$$F' = \begin{bmatrix} f_1{}' \\ f_2{}' \\ f_3{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right), \quad (i,j = 1,2,3)$$

- < 다변수 벡터함수(비선형시스템)의 근 찾기 : Newton Method >

$F(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ 의 해를 찾기 위한 반복법 연구

초깃값 $\boldsymbol{x}_0$, 오차한계 ρ

i) $F'(\boldsymbol{x}_k)$, $k = 0,1,2,\cdots$ 야코비행렬을 찾는다.

ii) $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_k) \cdot \Delta \boldsymbol{z}_k = -F(\boldsymbol{x}_k)$ 행렬방정식을 푼다

iii) $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \Delta \boldsymbol{z}_k$ 에러를 보정한다.

iv) $\| F(\boldsymbol{x}_{k+1}) \| < \rho$ 잉여에러가 작으면 멈춘다.

v) i)로 돌아간다.

- Example) $F(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \exp(2x_1) - x_2 - 4 \\ x_2 - x_3^2 - 1 \\ x_3 - \sin x_1 \end{bmatrix}$ => $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0.858966 \\ 1.573330 \\ 0.7571875 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0} , \ \rho = 10^{-6}$$