금융수학개론 (Lecture Note)

전남대 수학과 금융수학 LAB, CNU

Department of Mathematics, Chonnam National University

참고도서 : 금융수학개론(Financial Mathematics Introduction), 이재성

•

1 금융수학의 기초

금융수학은 간단히 말해서 기초자산이라 불리는 각종 유가증권가격의 확률분포, 이자율의 확률분포, 금융파생상품의 가격, 금융 포트폴리오 운용 및 위험관리 등을 수리적 기본개념을 통해 이해하고 연구 · 학습하는 분야이다.

1.1 파생상품의 소개

파생상품이란 곡물, 원자재 및 주식, 채권 등의 각종 유가증권, 환율, 이자율 등 기초자산(underlying assets)의 가격이나 가치변동에 따라 그 가치가 결정되는 금융상품

- 상품파생상품 : 곡물, 원자재 등 상품을 기초자산으로 하는 파생상품
- 금융파생상품 : 환율, 이자율, 주식, 채권 등 금융상품을 기초자산으로 하는 파생상품
- 장내파생상품, 장외파생상품 : 거래 장소에 따라
- 선도, 선물, 스왑, 옵션 : 거래 형태에 따라

1.1.1 주요 금융파생상품

선도계약(Forward contracts, 선도거래)

– 미래의 약정된 시점(결제일)에 미리 정해진 가격(선도가격)으로 자산을 사거나 팔기로 맺은 계약.

– 거래소에서 거래되는 것이 아니라 장외에서 거래

– 선도계약의 매도자와 매수자는 반드시 결제일에 선도가격으로 거래 의무

선물(Futures, 선물계약)

– 미래의 약정된 시점의 주가지수, 환율, 금리 및 상품을 미리 정한 가격으로 현시점에서 거래하는 것으로 공식화된 거래소에서 표준화된 조건으로 거래

– 선도와 선물은 미래시점에서 거래될 가격을 현재시점에서 확정시키는 계약

– 기초자산의 가격변동위험을 헤지(Hedge, 대비)하는 수단으로 이용

– 선물거래는 거래소를 이용하고 증거금 및 일일정산제도가 있어 선도와 구별

스왑 (Swap)

– 계약당사자의 특정자산 및 부채를 일정기간 동안 정해진 조건으로 교환하기로 하는 계약

– 대표적인 장외파생상품

– 동일통화에 대한 고정금리와 변동금리를 교환 하는 금융스왑

– 서로 다른 통화의 금리 및 원금을 교환하는 통화스왑

옵션 (Option)

– 미래의 특정시점에 미리 정한 가격으로 지정된 기초자산을 매매할 수 있는 권리 부여 상품

– 주식옵션, 주가지수옵션, 통화옵션, 금리옵션, 상품옵션

– 미래의 특정시점을 만기 (maturity), 미리 정한 가격을 행사가격 (strike price)

– 유러피안 옵션 : 만기시점에서만 권리를 행사

– 아메리칸 옵션 : 만기 이전에 원하는 시점에서 권리를 행사할 수 있는 옵션

1.1.2 옵션의 만기 페이오프 (PAYOFF)

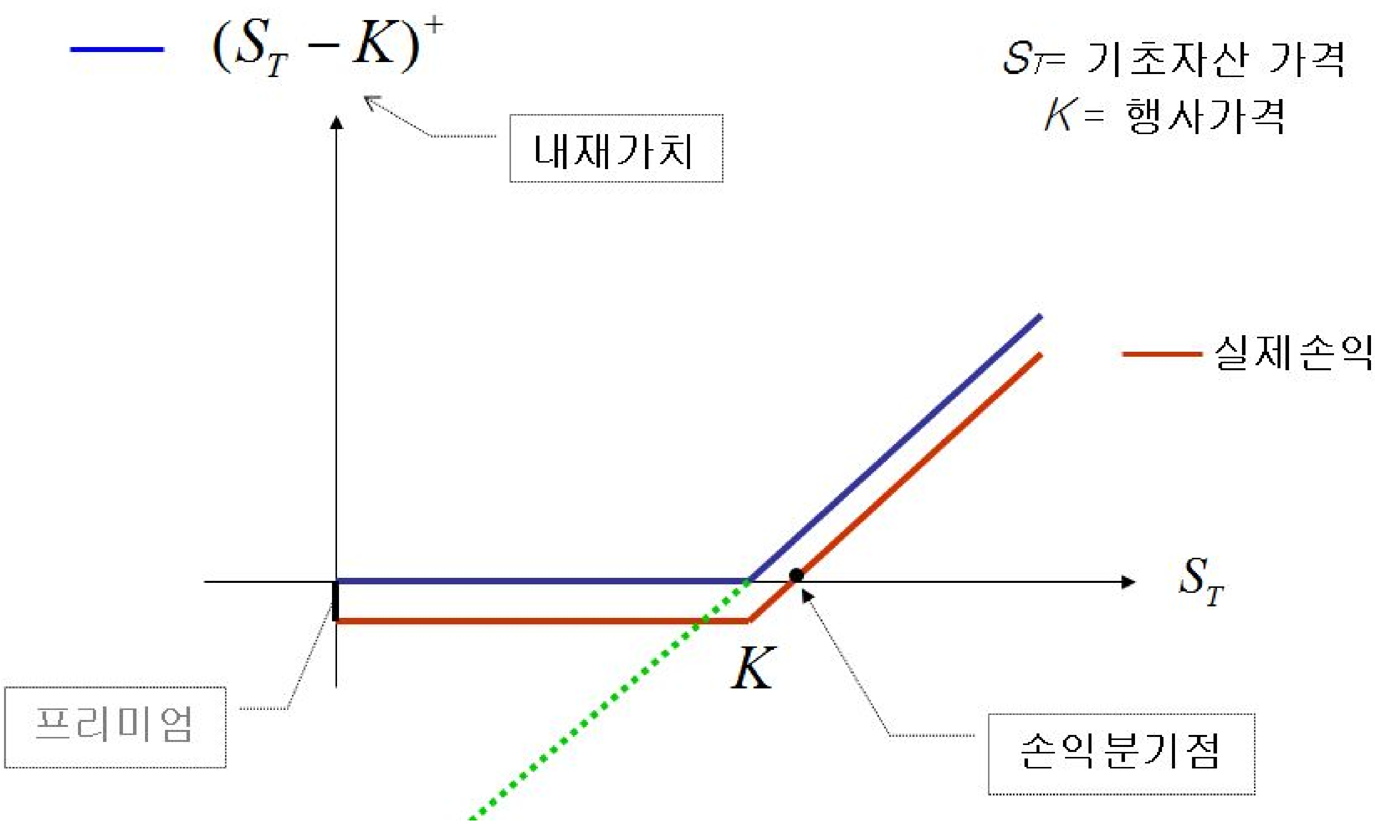
- 현재 주가 140만원인 삼성전자의 주식 100주를 한 달 후에 주당 145만원에 매수할 수 있는 권리의 현재가치는 얼마일까?

- 현재 주가 23만원인 현대차 주식 100주를 3개월 후에 주당 23만원에 매도할 수 있는 권리의 현재가치는 얼마일까? 이론적인 적정가치를 구할 수 있을까?

- 옵션의 가격 (옵션을 살 때 지불하는 프리미엄) 을 고려하지 않은 상태에서

  옵션의 매입자 또는 매도자의 만기시점에서의 손익을 payoff라 부른다.
- 옵션 매수자의 만기 payoff는 음의 값을 가질 수 없고, 매도자는 양의 값을 가질 수 없다.
- 콜옵션 (call option) : 만기에 매수할 수 있는 권리를 가지는 옵션
- 풋옵션 (put option) : 만기에 매도할 수 있는 권리를 가지는 옵션
- 옵션 만기 T, 만기시점의 기초자산 가격 S_T, 행사가격 K
  - 콜옵션의 payoff $= \max(S_T - K,\ 0)$: 만기 가격 (S_T) 이 오르면 옵션 권리행사
  - 풋옵션의 payoff $= \max(K - S_T,\ 0)$: 만기 가격이 내려가면 옵션 권리행사
- 매도자는 매수자에게 payoff만큼 지불해야 하는 의무가 있다

콜옵션 매수자의 payoff



옵션의 가치

옵션은 권리이지 의무는 아니기 때문에 옵션을 매수하는 사람은 옵션을 매도한 사람에게 일정한 구입의 대가를 지불해야 하는데 이것을 옵션 프리미엄이라고 한다.

$$\text{옵션의 가치} = \text{내재가치} + \text{시간가치}$$

옵션의 내재가치

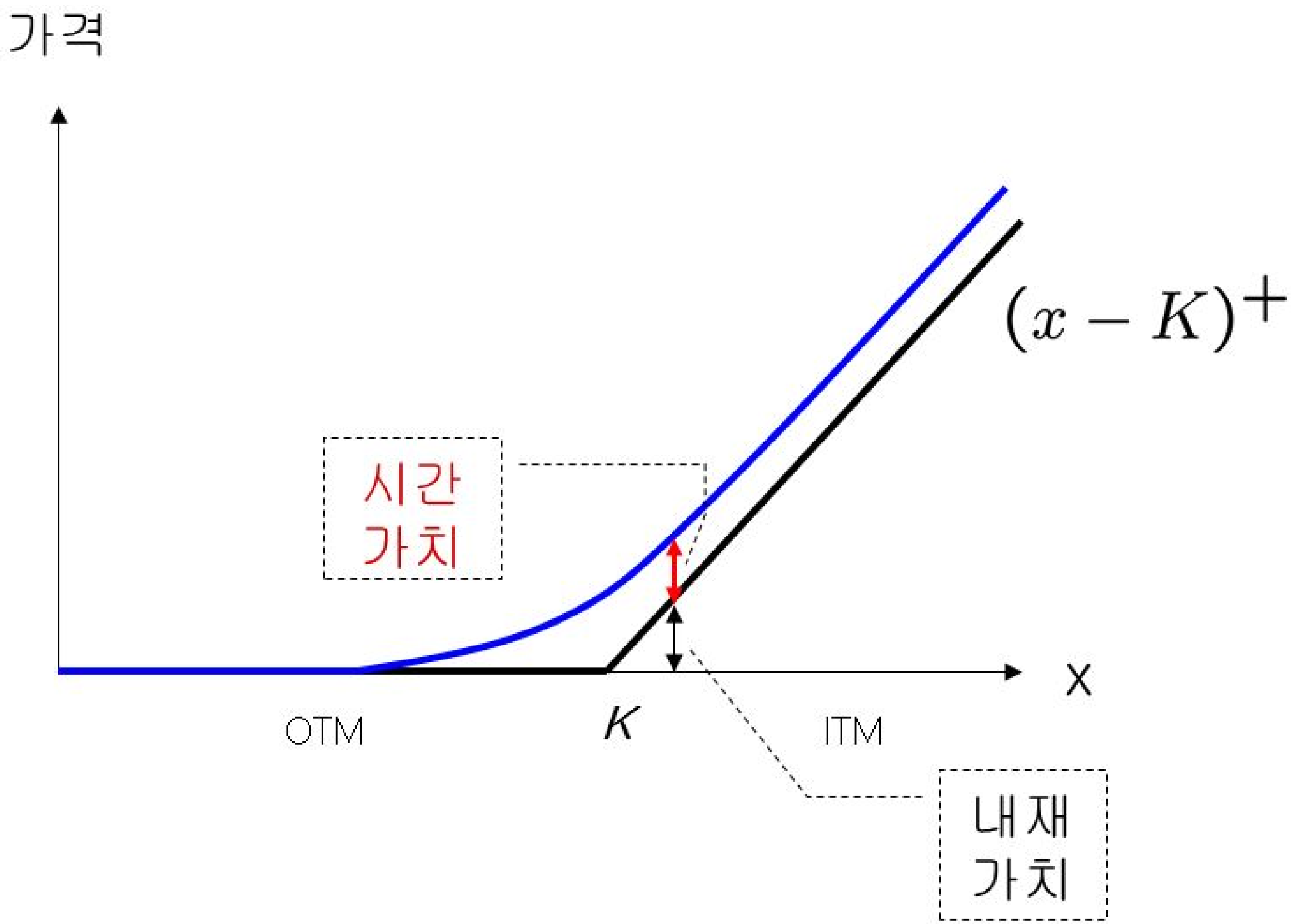
– 해당 옵션을 즉시 행사했을 때 얻을 수 있는 가치

– 시간 t 시점에서의 콜옵션 내재가치 : $\max(S_t - K,\ 0) = (S_t - K)^+$

옵션의 시간가치

– 대부분 옵션은 만기일 이전에는 내재가치 이상의 가격으로 거래되는 것이 정상

– 옵션의 가격 중 내재가치를 초과하는 부분이 시간가치



가격
시간
가치
$(x-K)^+$
X
OTM
K
ITM
내재
가치

1.2 옵션 가격결정이론의 소개

(질문 1) 마이크로소프트사의 현재 주가는 50달러라고 가정하자. 연방정부를 상대로 한 중요한 재판 결과가 1주일 후에 공표된다. 승소하면 1주일 후에 적정 주식값은 80달러, 패소하면 40달러가 된다. 재판의 승소확률은 반반이고, 모든 시장 참여자들이 이런 상황을 알고 있다. 이때 일주일 후에 1주를 60달러에 매수할 수 있는 옵션의 적정가치는 얼마일까? (조건을 단순화시켜서 시장은 완전시장이고, 거래비용은 없다고 가정한다. 짧은 기간인 1주일 동안의 이자도 없다고 가정한다.

– 60달러에 매수할 수 있는 콜옵션을 소유하고 있다고 가정

– 80달러로 오르면 60달러에 사서 80달러에 팔면 20달러의 이익

– 40달러로 떨어지면 옵션을 행사하지 않으면 손해없음

– 각 경우의 확률이 1/2이므로 이 옵션의 이익에 대한 기댓값은

$$20 \cdot (1/2) + 0 \cdot (1/2) = 10$$

– 이 옵션의 현재 적정가치는 10달러라고 생각하는 것이 자연스럽다.

1.2.1 차익거래 (Arbitrage trading, 무위험 거래)

위와 같은 새뮤얼슨의 방법은(1965년) 차익거래의 오류를 가지고 있다.

– 차익거래(Arbitrage) : 전혀 위험을 동반하지 않은 채 이익을 수반하는 거래

질문 1의 차익거래

주가를 S, 옵션의 가치를 c 라고 하자. 옵션이 10달러에 거래된다고 하자.

A의 포트폴리오 (Portfolio)

옵션을 10달러에 매도하고, 15달러를 차입해서 25달러로 주식 1/2주를 매입

(옵션 매도에 대하여 만기시 옵션의 가치 c에 대한 채무를 가짐)

A의 포트폴리오에 대한 가치 : $\Pi = \dfrac{1}{2}S - c - 15$

- 주가가 80달러로 오른 경우
  - A의 주식가치는 40달러, 빌린 돈 15달러
  - 매수자에게 줄 옵션 가치 c는 20달러

$$\Pi = \frac{1}{2}80 - 20 - 15 = 5$$

- 주가가 40달러로 내린 경우
  - A의 주식가치는 20달러, 빌린 돈 15달러
  - 매수자에게 줄 옵션 가치 c는 0달러

$$\Pi = \frac{1}{2}40 - 0 - 15 = 5$$

1.2.2 복제 포트폴리오

차익거래 불가원칙에 따라 적정 옵션의 가격 산출

차익거래 불가원칙 : 옵션의 현재 가격은 해당 포트폴리오의 현재 가치와 동일

(옵션만의 포트폴리오를 현금과 주식의 포트폴리오로 복제)

- 포트폴리오 구성 : x 달러 현금, 마이크로소프트 주식 y 단위

  포트폴리오의 가치 $\Pi(t) = x + Sy$

- 1주일 후의 가치가 옵션의 가치와 같아지도록 x 와 y 의 값을 정함
- 주가가 상승하는 경우 $c = 20$, 하락하는 경우 $c = 0$

$$\Pi(T) = c \quad \Rightarrow \quad x + 80y = 20, \qquad x + 40y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -20, \quad y = \frac{1}{2}$$

- 주식 1/2주와 차입금 20달러의 포트폴리오의 1주일 후의 가치는 옵션 1단위와 동일
- **옵션의 현재 가격 = 포트폴리오의 현재 가치** ($\Pi(0)$) :

  $\Pi(0) = -20 + 50/2 = 5$ 달러

1.2.3 델타 헤징법

1973년 Black-Sholes의 방법 : 연속시간 시장모델에서 옵션의 적정가격 산출

단순모형의 Black-Sholes방법

– 포트폴리오 구성 : 1단위 옵션계약을 매도하고, 마이크로소프트 주식 Δ단위 매입

포트폴리오의 가치 $\Pi = \Delta \cdot S - 1 \cdot c$

– 1주일 후 무위험이 되도록 Δ를 조정

주식 가격이 오를 때	주식 가격이 내릴 때
$\Pi = 80\Delta - 20$	$\Pi = 40\Delta - 0$

– 두 경우의 가치가 같아지는 Δ

$$80\Delta - 20 = 40\Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1/2, \quad \Pi = 20$$

– 만기시 주가의 오름과 내림에 관계없이 1주일 후의 내 포트폴리오의 가치는 20달러

– 즉, 1주일 후 20달러의 무위험 자산을 보유하는 것이 된다

– 그러므로 현재의 포트폴리오의 달러가치는 $\Pi = \frac{1}{2}S - 1\,c = 20 \Rightarrow S = 50,\ c = 5$

단순모형의 Black-Sholes방법 : 일반화

– 만기시점의 오른 주가 S^+, 내린 주가 S^- 라고 하고, 그 때의 옵션의 가치를 c^+, c^- 두자

– 만기 무위험이 되도록 Δ를 구하면

$$S^+\Delta - c^+ = S^+\Delta - c^- \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{c^+ - c^-}{S^+ - S^-}$$

– 무이자 가정하에서 포트폴리오의 만기무위험 가치

$$S^+\Delta - c^+ = S^- \frac{c^+ - c^-}{S^+ - S^-} - c^+ \text{ 는}$$

현재가치

$$\Pi = S\,\Delta - c = S\,\frac{c^+ - c^-}{S^+ - S^-} - c \text{ 와}$$

같게 된다. 위 두 식의 등식에서 현재옵션의 적정가격 c는 아래와 같다.

$$c = p\,c^+ + (1-p)\,c^-, \quad p = \frac{S - S^-}{S^+ - S^-}, \quad 1 - p = \frac{S^+ - S}{S^+ - S^-}$$

– 위에서, p는 주가상승률, $1-p$는 주가하락률이다.

– 이 때, 행렬방정식 $A\,Q = 0$가 만족한다.

손익행렬 $A = \begin{pmatrix} S^+ - S & S^- - S \\ c^+ - c & c^- - c \end{pmatrix}$, 마팅게일측도 (martingale measure) $Q = \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$

1.2.4 마팅게일측도 방법

파생상품의 가격결정이론에서 가장 중요한 개념 중 하나

– 행렬 A를 손익을 나타내는 손익행렬

$$A = \begin{array}{c} \text{주식손익} \\ \text{옵션손익} \end{array} \begin{pmatrix} \text{상승시나리오} & \text{하락시나리오} \\ \text{상승시나리오} & \text{하락시나리오} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^+ - S & S^- - S \\ c^+ - c & c^- - c \end{pmatrix}$$

– 마팅게일측도 $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ $: q_1 + q_2 = 1 \quad (\quad q_1,\ q_2 > 0\ )$

– S, S^+, S^-, c^+, c^-를 알고 있으므로

$AQ = 0$ 와 $q_1 + q_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad c,\ q_1,\ q_2$ 를 구할 수 있다.

(1) $(S^+ - S)q_1 + (S^- - S)q_2 = 0, \quad q_1 + q_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad q_1,\ q_2$

(2) $(c^+ - c)q_1 + (c^- - c)q_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = c^+ q_1 + c^- q_2$

– $c = c^+ q_1 + c^- q_2$는 마팅게일측도 Q에 대한 1주일 후 옵션가치의 기댓값으로 표현

(질문 1) $AQ = \begin{pmatrix} 80-50 & 40-10 \\ 20-c & 0-c \end{pmatrix} Q = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 1/4, q_2 = 3/4,\ c = 5$

1.2.5 차익거래와 마팅게일측도

$\boxed{\text{차익거래가 없다는 것은 마팅게일측도가 존재한다는 것과 동치}}$

주식을 x_1주 매입하고, 그에 대응하는 옵션을 x_2계약 매수 한다고 하자

– 주가 상승시 손익 $= x_1 (S^+ - S) + x_2 (c^+ - c)$

– 주가 하락시 손익 $= x_1 (S^- - S) + x_2 (c^- - c)$

– 손익행렬 A와 매입벡터 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$를 이용하면

시나리오에 따른 손익 $\quad P = A^T X$

– 차익거래는 모든 시나리오에 대하여 손실이 없는 거래이므로

P의 모든 성분이 음이 아니며, 양의 성분을 가질 수 있다는 것이다

– 차익거래가 없다는 것은 위와 같은 경우가 일어 날 수 없다는 것이고

이는 모든 성분이 양수인 마팅게일측도 Q가 존재해서

$A\,Q = 0$이 성립한다는 것과 동치이다

자산가격결정의 기본정리 (Fundamental Theorem of Asset Pricing)

유한개의 자산과 시나리오로 이루어진 금융시장에서 다음은 서로 동치이다.

1) 차익거래 (Arbitrage trading) 의 기회가 존재하지 않는다

2) 마팅게일측도 Q 가 존재한다

– 경제학의 가격결정이론에서는 무위험차익거래의 기회가 없음을 가정하는 것이 일반적

– 즉, 마팅게일측도가 존재한다는 가정에서 출발

m 가지의 자산과 n 가지의 시나리오 손익행렬

$$A = \begin{array}{r} \text{자산}1 \\ \vdots \\ \text{자산}m \end{array} \begin{pmatrix} \text{시나리오}1 & \text{시나리오}2 & \cdots & \text{시나리오}n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{시나리오}1 & \text{시나리오}2 & \cdots & \text{시나리오}n \end{pmatrix}$$

위험중립가치평가 (risk-neutral valuation) : 파생상품의 현재가치

자산가격결정의 기본정리에 따르면 마팅게일측도에 대한 파생금융상품의 만기 payoff 의 기대가치를 만기까지의 이자율로 할인한 값이 현재적정가치가 된다

1.3 이자율과 채권

무위험이자율(risk free interest rate)

- 화폐의 시간적 가치에 유동성 프리미엄을 추가
- 위험이 전혀 내포되지 않는 순수한 투자의 수익률
- 옵션의 적정가치를 구하는데 있어서 기간과 시점에 관계없이 상수인 무위험이자율 가정이 보편화
- 무차익거래원칙에 따라 무위험이자율은 단일표준화

1.3.1 이자율의 계산

A의 금액을 무위험 연이자율 r로 투자한다고 가정하고 연 1회 복리계산

n년 후의 가치 $\quad\Rightarrow\quad A(1+r)^n$

연간 $m>1$번 복리계산한다면 n년 후는 mn번 복리계산하고 $1/m$년 이율이 r/m이므로

n년 후의 가치 $\quad\Rightarrow\quad A(1+r/m)^{nm}$ (예) $m=365$ (매일 복리계산)

이 때, m 이 매우 큰수로 생각하고 $m \to \infty$ 의 극한을 취하면 연속복리연이율 r 기준에서

n 년 후의 가치 $\Rightarrow$ $A\,e^{rn}$ $(\because)\ (1+r/m)^{nm} = (1+r/m)^{(m/r)(rn)} \to e^{rn}$

현물이자율 (spot rate) 또는 현물금리

현재부터 일정기간 동안의 연평균이자율

선도이자율 (forward rate) 또는 선도금리

현재시점에서 평가한 미래 특정시점으로 부터 일정기간 동안의 이자율

(예) 연 복리로 n 년 만기 현물이자율이 r_n 이라하고

$n-1$ 년 후부터 n 년 후까지 1년 동안의 선도이자율 r_f 는?

$$r_f = \frac{(1+r_n)^n}{(1+r_{n-1})^{n-1}} - 1 \quad \Leftarrow \quad (1+r_{n-1})^{n-1}(1+r_f) = (1+r_n)^n : \text{수익률}$$

1기인 $n-1$ 년까지의 현물이자율 r_{n-1}, 2기인 n 년까지의 현물이자율 r_n

2기까지의 수익률은 1기까지 투자한후 재투자하는 방법의 수익률과 같다

1.3.2 이표채 (Coupon bond)

채권이란 정부, 지방자치단체, 기업 등의 발행주체가 자금을 조달하기 위해 발행하는 유가증권으로 만기에 원금과 약정일에 약정이자를 지급하기로 약속한 일종의 차용증서

– 액면가 (face value) : 원금, 표면금리 (coupon rate) : 약정이자율

이표채

– 만기와 표면금리가 정해져 있어 만기까지 매 기간 약정일에 정해진 이자 지급

– 만기일에 액면가 원금을 상환하는 채권

– 매 기간 적용될 시장이자율이 r 로 일정한 경우 (r 은 할인율로 생각할 수도 있음)

채권의 가치 P, 표면금리 c, 액면가 F, 남은 기간 n

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{cF}{(1+r)^k} + \frac{F}{(1+r)^n}$$

– $k(k = 1, \cdots, n)$ 년 후에 받는 이자 cF 의 실제 가치는 $(1+r)^k$ 만큼 할인받는 것으로 간주

즉, k 년 후 받는 이자의 가치 $P_k = \dfrac{cF}{(1+r)^k}$, n 년 후 원금의 가치는 $\dfrac{F}{(1+r)^n}$

– 매 기간 적용될 기간 평균이자율이 r_k(기간이자율)로 기간마다 다른 경우

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{cF}{(1+r_k)^k} + \frac{F}{(1+r_n)^n}$$

1.3.3 만기수익률

채권을 만기까지 보유했을 때 유입되는 현금흐름과 채권의 현재시장가격을 같게 해주는 할인율

– 채권의 현재시장가치 P_0, 기간별 표면금리 c, 액면가 F, 남은 기간 n

만기수익률 y : $P_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{cF}{(1+y)^k} + \frac{F}{(1+y)^n}$

만기수익률은 채권을 만기까지 보유했을 때 채권투자로부터 얻게 될 기간평균수익률이다

예제

액면가 100달러, 만기 3년, 표면금리 연 4% 인 채권이 있다. 1기간이 1년이고 시장이자율이 1년 기준으로 3%, 2년 기준으로 3.75%, 3년 기준으로 4.25% 라고 할 때, 이 채권의 현재 적정가격과 만기수익률은?

적정가격 : $P = \frac{4}{1.03} + \frac{4}{1.0375^2} + \frac{104}{1.0425^3} = 99.39, \quad cF = 0.04 \times 100 = 4$

만기수익률 y : $\frac{4}{(1+y)} + \frac{4}{(1+y)^2} + \frac{104}{(1+y)^3} = P = 99.39 \quad \Rightarrow \quad y = 0.0422$ 즉, 연 4.22%

1.3.4 채권가격의 근사

– P 는 채권가격, r 은 만기까지 상수라고 가정한 시장이자율 또는 만기수익률,

만기까지 남은 기간은 n 이라고 하자.

– C_k 는 k 번째 기간에 발생하는 현금흐름

(예) $C_1 = C_2 = \cdots = C_{n-1} = cF$: 이자, $C_n = cF + F$: 이자 + 원금

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k}$$

- 위 채권가격 P 의 r 에 대한 도함수를 보면

$$\frac{dP}{dr} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{kC_k}{(1+r)^{k+1}} < 0 \qquad \frac{d^2P}{dr^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)C_k}{(1+r)^{k+2}} > 0$$

– P 는 이자율 r 에 대해서 감소함수이고 아래로 볼록인 함수

– 2차 테일러다항식을 이용한 근삿값

$$P(r+\Delta r) \approx P(r) + P'(r)\Delta r + \frac{1}{2}P''(r)(\Delta r)^2$$

1.3.5 듀레이션과 볼록성 (Dulation and Convexity)

듀레이션

– 채권투자로부터 발생하여 회수하는 데 걸리는 평균적 기간 : McCaulay duration

– 채권에서 발생하는 현금흐름의 가중평균만기로서 채권가격의 이자율변화에 대한 민감도를 측정하기 위한 척도

$$\text{듀레이션} \quad D = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{n}\frac{kC_k}{(1+r)^k} = -(1+r)\frac{P'(r)}{P(r)}, \quad \text{채권가격} \quad P = \sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{(1+r)^k}$$

듀레이션을 이용한 이자율 변동에 따른 채권가격 변동액 근사

$$dP = -\frac{D}{1+r}\cdot P\cdot dr \quad \Leftarrow \quad P'(r) = -\frac{P}{1+r}D$$

$$P(r+\Delta r) \approx P(r) - \frac{D}{1+r}\cdot P\cdot \Delta r \qquad (\Delta r \text{ 이 작을 때 유효})$$

– $P(r+\Delta r)$는 이자율 변동 Δr에 대한 $(r, P(r))$를 지나고 감소하는 직선으로 근사된다

볼록성

– 이자율 변동폭이 큰 경우는 듀레이션에 의한 직선근사값은 실제 가격변동에 비해 오차가 증가

– 이를 보완 하기 위하여 볼록성을 사용한다

$$\text{볼록성} \quad C = \frac{P''(r)}{P(r)}, \quad \text{즉,} \quad P''(r) = C \cdot P(r)$$

– 채권가격의 2차 테일러다항식의 근사에서

$$P(r + \Delta r) \approx P(r) + P'(r) \cdot \Delta r + \frac{1}{2} P''(r) \cdot (\Delta r)^2$$

$$P(r + \Delta r) \approx P(r) - \frac{D}{1+r} \cdot P(r) \cdot \Delta r + \frac{1}{2} C \cdot P(r) \cdot (\Delta r)^2$$

– 위 $P(r + \Delta r)$ 는 이자율 변동 Δr 에 대한 $(r, P(r))$ 를 지나는

아래로 볼록한 곡선으로 근사된다

예제

액면가 $F = 5,000$ 달러 만기 $n = 3$ 년 표면금리 연 $10\%(c = 0.1)$ 인 채권이 있다. 1 기간이 1 년이고 시장이자율이 연 $10\%(r = 0.1)$ 의 상수인 경우 채권의 현재가치 P, 듀레이션 D, 볼록성 C 를 구하라. 또한, 시장이자율이 연 12% 로 오르는 경우 실제 채권가격과 듀레이션이용한 근사값 및 듀레이션과 볼록성을 이용한 근사값을 구하라.

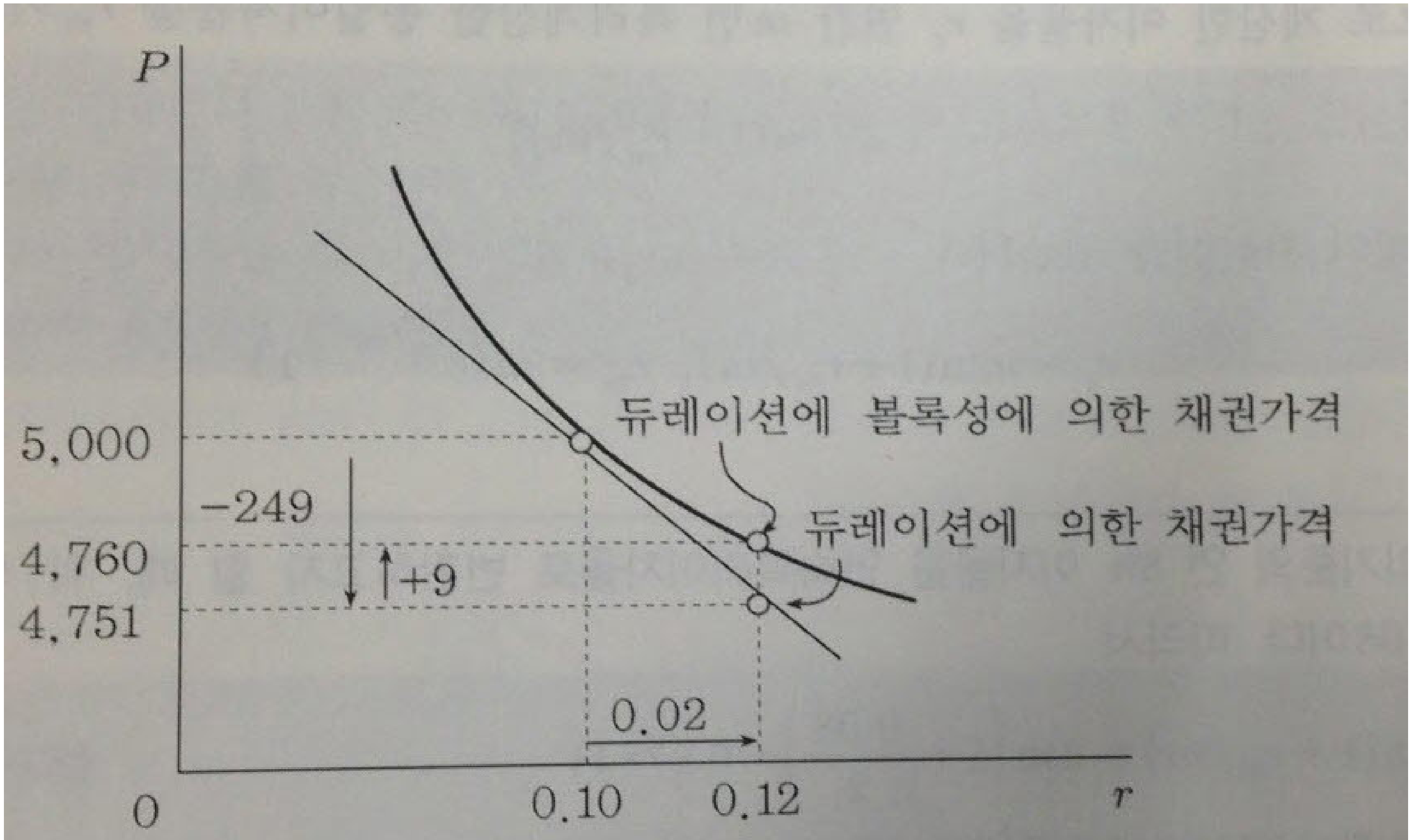
$$P(r) = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k} \; (C_1 = C_2 = 500, C_3 = 5,500) \;\Rightarrow\; P(0.1) = \frac{500}{1.1} + \frac{500}{1.1^2} + \frac{5,500}{1.1^3} = 5,000$$

$$D = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{n} \frac{kC_k}{(1.1)^k} = 2.74, \qquad C = \frac{P''(0.1)}{P(0.1)} = \frac{1}{P(0.1)}\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)C_k}{(1.1)^{k+2}} = 8.76$$

실제 채권가격 $P(0.12) = \frac{500}{1.12} + \frac{500}{1.12^2} + \frac{5,500}{1.12^3} = 4,760$

듀레이션 근사가격 $P(0.12) \approx P(0.1) - \frac{D}{1.1} \cdot P(0.1) \cdot 0.02 = 4,751$

듀레이션-볼록성 근사가격 $P(0.12) \approx P(0.1) - \frac{D}{1.1} \cdot P(0.1) \cdot 0.02 + \frac{1}{2} C \cdot P(0.1) \cdot (0.02)^2 = 4,759.8$



듀레이션과 볼록성을 이용한 채권가격 변동의 근사

1.3.6 무이표채 (ZERO COUPON BOND)

– 표면금리가 0 인 채권으로 중도에 이자지급은 없고 만기일에 원금만 상환하는 채권

– 듀레이션은 채권의 만기와 동일

– 연이율이 상수 r, 만기 n 년, 액면가 F 인 무이표채

$$\text{채권가격} : \quad P = \frac{F}{(1+r)^n}$$

– 만기 n 년, 액면가 F 인 무이표채의 시장가격이 P_0 일 때

$$\text{만기수익률} \ r_n \quad : \quad P_0 = \frac{F}{(1+r_n)^n}$$

  – r_n 은 n 년 동안의 현물이자율과 동일

1.3.7 이자율의 환산식

– 연속복리이자율 r에 대하여

$$1\text{년간 수익률} = e^r$$

이자율의 환산

연간 m 번 복리계산한 동일이자율 r_m, 연속복리기준으로 계산한 이자율 r_c의 관계식

$$e^{r_c} = \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m \quad \Rightarrow \quad r_c = m \ln\left(1 + \frac{r_m}{m}\right), \quad r_m = m(e^{r_c/m} - 1)$$

연간무위험이자율 r을 연속복리이자율로 가정하고 투자기간은 양의 실수 t로 간주

– A의 금액을 투자할 때, t년 후의 투자액 $S = S(t)$

$$S(t) = A\, e^{rt}$$

$$\frac{dS}{dt} = S'(t) = A\, r\, e^{rt} = r\, S(t)$$

– 무위험자산 투자에 대한 미분방정식

$$dS = r\, S(t)\, dt$$

1.4 선도가격(인도가격, 행사가격)

무차익원리(no arbitrage)를 이용한 적정선도가격 결정

T 기간 동안의 연속복리 무위험이자율(또는 무위험할인율)을 r 이라고 가정하고 각종 기초자산에 대한 만기 T 의 적정선도가격을 구하자

– **자산의 현재가격을** S_0 – **현재의 선도가격을** F_0

중간무소득 투자자산의 공정 선도가격

– 무배당주식 등의 중간 무소득투자자산인 경우

공정거래의 선도가격 $F_0 = S_0 e^{rT}$

– If $F_0 > S_0 e^{rT}$, 차익거래 포토폴리오 Π_1 존재 :

Π_1 : S_0 차입하여 자산 1단위 매입, 자산 1단위 매도 선도계약

만기에 매입한 자산 1단위 인도하고 선도가격 F_0 받음

차익 $\Pi_1 = F_0 - S_0\, e^{rT} > 0$

– If $F_0 < S_0 e^{rT}$, 차익거래 포트폴리오 존재 :

Π_2 : 자산을 F_0 에 공매도하고 받은 대금 S_0 을 T 년동안 투자

만기에 투자한 금액 $S_0\, e^{rT}$ 을 받아 공매도 금액 F_0 를 지급

차익 $\Pi_2 = S_0\, e^{rT} - F_0 > 0$

중간소득이 발생하는 투자자산의 공정 선도가격

– 배당을 지급받는 주식, 예정된 이자를 지급받는 채권과 같은 소득이 있는 자산

공정거래의 선도가격 $F_0 = (S_0 - I)e^{rT}$, I 는 예정된 미래소득의 현재가치

중간비용이 발생하는 투자자산의 공정 선도가격

– 보관비용 등의 비용이 발생하는 선도계약

공정거래의 선도가격 $F_0 = (S_0 + I)e^{rT}$, I 는 발생하는 총비용의 현재가치

예제

채권만기가 1년 남은 채권의 현재가격이 130달러, 무위험할인율 연 6%, 향후 1년간 지급될 채권이표의 현재가치가 12달러일 때, 이 채권에 대한 만기 1년의 적정선도가격을 구하라.

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT} = (130 - 12)\, e^{0.06 \cdot 1} = 125.3 \text{ 달러}$$

예정수익률을 제공하는 투자자산의 공정 선도가격

– 선도계약기간 동안에 투자자산에서 얻는 수익률 q가 있는 경우

공정거래의 선도가격 $F_0 = S_0\, e^{(r-q)T}$

공정 통화선도환율

– 상대국 통화(달러) 1단위의 자국통화로 표시한 현물환율을 S_0(원)

– 상대국 통화의 연속복리이자율 r_f, 자국통화의 이자율 r

– F_0를 상대국통화 1단위에 대한 만기 T의 자국통화의 선도가격(선도환율)

공정거래의 선도환율 $F_0 = S_0\, e^{(r-r_f)T}$(원)

($\because$) – 상대국통화 A를 가지고 있으면 T년 후 $A\, e^{r_f T}$(달러)가 되고

선도환율을 적용하여 자국통화로 바꾸면 $A\, e^{r_f T}\, F_0$(원)의 가치가 된다.

– 상대국통화 A를 자국통화로 바꾸면 $A\, S_0$(원)가 되고

만기 T년 후에는 $A\, S_0\, e^{r\,T}$(원)의 가치가 된다.

– 위 두가지의 가치가 동일하다는 가정에서 선도환율을 구할 수 있다.

$$A\, e^{r_f T}\, F_0 = A\, S_0\, e^{r\,T}$$

1.5 옵션가격과 이항모형 (이자율포함)

지금부터는 연속복리 무위험이자율을 상수라고 가정함

질문

> A회사의 현재 주가는 주당 50달러이고, 앞으로 6개월 후에 주가가 각각 절반의 확률로 55달러로 오르든지 45달러로 내릴 것으로 알려져 있다. 연속복리 무위험이자율이 연 10%라고 가정하고 만기 6개월에 행사가격이 50달러인 유러피언 풋옵션의 현재적정가치는 얼마일까?

– 가장 단순한 이항모형을 많이 이용

1.5.1 델타 헤징 방법

– 만기 $T = 6$ 개월, 행사가격 $K = 50$,

주가 $S(t)$, 풋옵션(주가가 내리는 경우 행사)의 가치 $p(t)$ 라고 두자

– 포트폴리오 구성 : 옵션하나를 팔고(옵션가치만큼 지불의무), 주식을 Δ 단위만큼 매수

포트폴리오 가치 $\Pi(t) = \Delta \cdot S(t) - p(t)$

– 주가가 오른 경우 : $S(T) = 55$, $p(T) = (K - S(T))^+ = 0 \Rightarrow \Pi(T) = 55 \cdot \Delta$

– 주가가 내린 경우 : $S(T) = 45$, $p(T) = (K - S(T))^+ = 5 \Rightarrow \Pi(T) = 45 \cdot \Delta - 5$

무위험 델타 헤징 방법 : $55 \cdot \Delta = 45 \cdot \Delta - 5 \Rightarrow \Delta = -1/2$

– 6개월 후 포트폴리오의 가치 $\Pi(T) = -1/2 \cdot S(T) - p(T) = -27.5$ 달러

– 현재 포트폴리오의 가치 = 6개월 후 포트폴리오의 가치에 대한 6개월 할인율 적용

$$\Pi(0) = -1/2 \cdot S(0) - p(0) = -27.5 \cdot e^{-0.1 \cdot 0.5} = -26.16$$

$\Rightarrow$ 옵션의 적정가격 $p = p(0) = 1.16$ 달러

1.5.2 마팅게일측도법

– 행렬 A를 주식과 옵션에 대한 손익을 나타내는 손익행렬

$(e^{rT}$는 T 기간동안의 수익률 (예) $e^{rT} = e^{0.1 \cdot 0.5} = e^{0.05})$

$$A = \begin{array}{c} \text{주식손익} \\ \text{옵션손익} \end{array} \begin{pmatrix} S^+ - Se^{rT} & S^- - Se^{rT} \\ c^+ - ce^{rT} & c^- - ce^{rT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 - 50e^{0.05} & 45 - 50e^{0.05} \\ 0 - ce^{0.05} & 5 - ce^{0.05} \end{pmatrix}$$

– 무차익거래에 의하여 $AQ = 0$을 만족하는 마팅게일측도 Q가 존재

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad : q_1 + q_2 = 1 \quad (\quad q_1, \ q_2 > 0 \ )$$

– $S, S^+, S^-, c^+, c^-, e^{rT}$를 알고 있으므로

$AQ = 0$ 와 $q_1 + q_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad c, \ q_1, \ q_2$ 를 구할 수 있다.

(1) $(S^+ - Se^{rT})q_1 + (S^- - Se^{rT})q_2 = 0, \quad q_1 + q_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad q_1, \ q_2$

(2) $(c^+ - ce^{rT})q_1 + (c^- - ce^{rT})q_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = e^{-rT}(c^+ q_1 + c^- q_2)$

– $c = e^{-rT}(c^+ q_1 + c^- q_2)$ 는 마팅게일측도 Q 에 대한

만기 옵션가치의 기댓값을 무위험이자율로 할인한 값으로 표현

– q_1 과 q_2 는 각각 주가의 상승과 하락의 확률로 해석

(1) $(S^+ - Se^{rT})q_1 + (S^- - Se^{rT})q_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad 55q_1 + 45q_2 = 50e^{0.05},\ q_1 + q_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 0.7564,\ q_2 = 0.2463$$

(2) $(c^+ - ce^{rT})q_1 + (c^- - ce^{rT})q_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad c = e^{-rT}(c^+ q_1 + c^- q_2) = e^{-0.05}(0 \cdot q_1 + 5 \cdot q_2) = 1.16$$

– 풋옵션의 현재가는 1.16 달러이다

1.5.3 1기간 이항모형

– 무배당 주식의 현재주가를 S_0, 콜옵션의 가치 c_0, 옵션의 만기 T

– 만기에 이르기가지 주식의 주가 상승률 $u > 1$, 하락률 $0 < d < 1$ 이라고 하자.

– 만기시점의 오른 주가 $S^+ = S_0 \cdot u$, 내린 주가 $S^- = S_0 \cdot d$,

그 때의 옵션의 가치를 각각 c^+, c^- 두자

– 포트폴리오 구성 Π : 1단위의 옵션계약 매도, 주식 Δ 단위 매입

$$\text{만기시점의 } \Pi = \Delta S - 1 \cdot c = \begin{cases} S_0\, u\, \Delta - c^+ & \text{주가상승시} \\ S_0\, d\, \Delta - c^- & \text{주가하락시} \end{cases}$$

– 포트폴리오의 만기무위험 가치에 의하여

$$S_0\, u\, \Delta - c^+ = S_0\, d\, \Delta - c^- \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{c^+ - c^-}{S_0(u-d)}$$

– 무차익원리에 의하여 포트폴리오의 만기의 무위험가치를

무위험이자율로 할인한 값은 포트폴리오의 현재가치와 같게된다.

$$e^{-rT}(S_0\, u\, \Delta - c^+) = S_0\, \Delta - c^0$$

$$c_0 = e^{-rT}\left(c^+ p + c^- (1-p)\right), \quad p = \frac{e^{rT} - d}{u-d} \text{ : 주가상승률로 간주}$$

– 또한 아래를 만족한다.

$$\text{주가의 기댓값} : p\, S_0\, u + (1-p)\, S_0\, d = e^{rT}\, S_0$$

– 콜옵션의 가치 c_0는 마팅게일측도 $Q = \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$에 대한

만기에서의 옵션의 기대가치를 할인한 값이고 공식화하면

$$c_0 = e^{-rT}\, E_Q(c_T) = e^{-rT}\left(c^+ p + c^- (1-p)\right), \quad p = \frac{e^{rT} - d}{u-d}$$

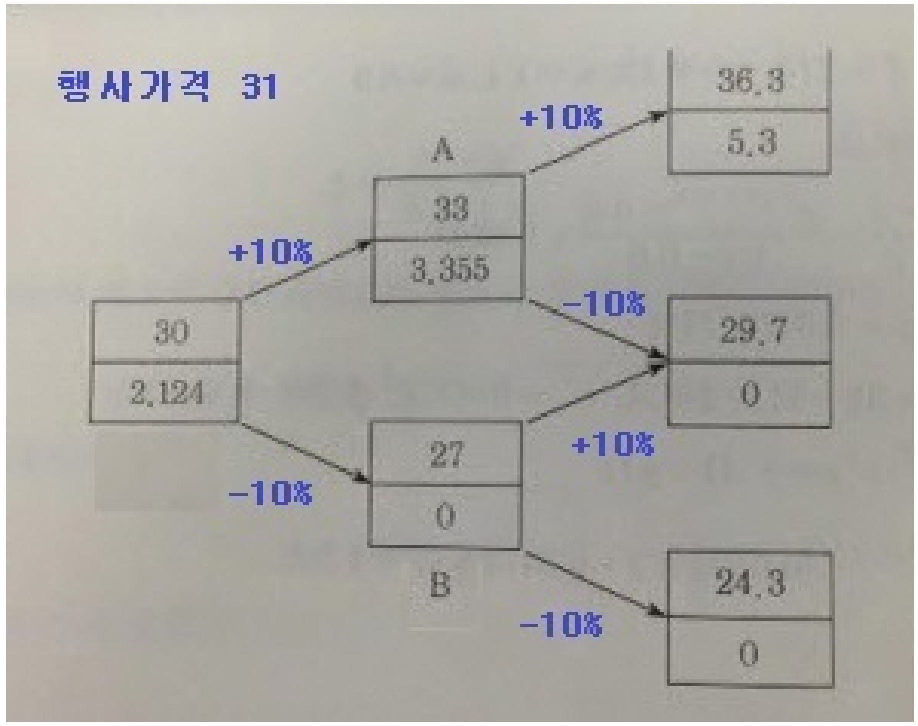
예제

현재주가가 30달러, 잔여 만기 3개월 행사가격 31달러인 유러피언 콜옵션의 현재가치를 구하고자 한다. 3개월 후 주가는 33달러 또는 27달러가 되고 무위험이자율은 연 12%라 가정한다.

$$S_0 = 30, T = 1/4, r = 0.12, u = 1.1, d = 0.9$$

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u-d} = 0.6523, \quad 1-p = 0.3477, \quad c^+ = 33 - 31 = 2, \quad c^- = 0$$

$$c_0 = e^{-rT}(c^+ p + c^-(1-p)) = 1.266 \text{ 달러}$$



1.5.4 2기간 이항모형

– 현재주가는 30달러이고 3개월마다 주가는 10%씩 상승하거나 하락한다

– 무위험이자율이 연 12%일 때 잔여 만기 6개월

행사가격 31달러인 유러피언 콜옵션의 현재 적정가치?

– 잔여만기 $T = 1/2$, 1기간을 Δt

$$T = 1/2,\ \ \Delta t = 1/4,\ \ r = 0.12,\ \ u = 1.1,\ \ d = 0.9$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.12\times 1/4} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523, \quad 1 - p = 0.3477$$

– 1기간 후의 옵션의 가치에 대한 공식

$$c = e^{-r\Delta t}\left(c^{+}p + c^{-}(1-p)\right)$$

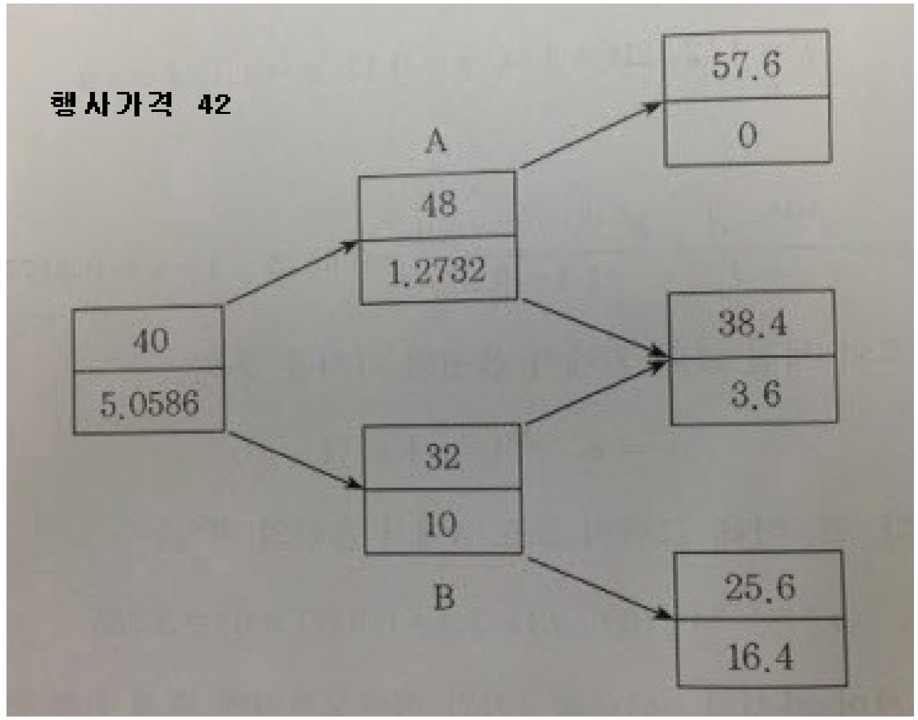
– 노드 A에서 옵션의 가치

$$e^{-0.12\times 1/4}(0.6523 \times 5.3 + 0.3477 \times 0) = 3.355$$

– 노드 B에서 옵션의 가치 : 0

– 현재시점의 옵션가치

$$e^{-0.12\times 1/4}(0.6523 \times 3.355 + 0.3477 \times 0) = 2.124$$



1.5.5 아메리칸 옵션

– 현재주가는 40달러이고 만기가 1년이고 6개월 기간마다 20% 상승하거나 하락한다.

– 무위험이자율이 연 10%이고 1기간을 6개월인 아메리칸 옵션(기간 중 행사가능)

– 행사가격이 42달러인 아메리칸 풋옵션의 현재 적정가치?

$$T = 1,\ \Delta t = 1/2,\ r = 0.10,\ u = 1.2,\ d = 0.8$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.10\times 1/2} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.6282, \quad 1 - p = 0.3718$$

– 1기간 후의 옵션의 가치에 대한 공식

$$c = e^{-r\Delta t}\left(c^{+}p + c^{-}(1-p)\right)$$

– 노드 A에서 옵션의 가치

$$e^{-0.10\times 1/2}(0.6282 \times 0 + 0.3718 \times 3.6) = 1.2732$$

– 노드 B에서 옵션의 가치계산은

$$e^{-0.10\times 1/2}(0.6282 \times 3.6 + 0.3718 \times 16.4) = 7.951$$

$\Rightarrow$ 옵션의 가치는 7.951달러이나 이 시점(B)에서 옵션을 즉시 행사하면 10달러의 이득을 얻으므로 실제 옵션의 가치는 10달러이다

– 현재시점에서 옵션의 가치계산은

$$e^{-0.10\times 1/2}(0.6282 \times 1.2732 + 0.3718 \times 10) = 5.0586$$

– 이 시점에서 옵션을 행사하면 2달러의 이득이 생기나 현재권리를 행사하지 않는 것이 바람직하므로 옵션의 가치는 5.0586달러이다.

2 확률, 통계의 기초

미래의 주가를 미리 알 수 없으며, 주가의 움직임은 매우 복잡하다. 이러한 특성을 갖는 주가의 움직임을 수학적으로 다룰 수 있으며 실제로 쓰일 수 있도록 모형화하는 것이 금융수학의 중요한 역할이다. 주가의 확률분포를 알아보고 이를 기본으로 하여 각종 파생상품의 적정가격을 구하기 위하여 사용되는 기초확률 및 통계이론을 간단히 소개한다.

2.1 확률변수의 기댓값과 분산

- $\mathbb{S}$: 표본공간 (sample space) : 확률실험에서 출현 가능한 모든 결과들의 집합
- ω : 표본점 (sample point) : 표본공간의 원소
- A : 사건 (event) : 표본공간의 부분집합
- $Pr(A)$: 사건 A가 발생할 확률
- $X : \mathbb{S} \to \mathbb{R}, \quad X(\omega) \mapsto x$: 확률변수 (random variable)
- 이산확률변수 (discrete random variable) : X 의 치역이 유한집합 또는 가산집합
- 연속확률변수 (continuous random variable) : X 의 치역이 실수전체 또는 구간

2.1.1 확률밀도함수 (PROBABILITY DENSITY FUNCTION, PDF)

– X가 이산확률변수이고 X의 치역을 R_X라 할 때, 임의의 $x \in R_X$에 대하여 확률

$$p(x) = Pr[X = x] = Pr[\omega \in \mathbb{S} \,:\, X(\omega) = x], \quad p : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

로 정의되는 함수 $p(x)$를 확률밀도함수라고 한다.

a) 모든 $x \in \mathbb{R}_X$에 대하여 $p(x) \geq 0$

b) $\displaystyle\sum_{x \in R_X} p(x) = 1$

c) $\displaystyle Pr[a \leq X \leq b] = \sum_{a \leq X \leq b} p(x)$

- $p \;:\; x \;\mapsto\; A = \{\omega \in \mathbb{S} \,:\, X(\omega) = x\} \;\mapsto p(x) = Pr(A)$

예) $\mathbb{S} = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad X : \mathbb{S} \to R_X = \{4, 2\}$

$$X : a \mapsto 4, b \mapsto 2, c \mapsto 2, d \mapsto 2, e \mapsto 2, f \mapsto 4$$

$$p(4) = Pr[X = 4] = Pr(\{a, f\}) = \frac{2}{6}, \quad p(2) = Pr[X = 2] = Pr(\{b, c, d, e\}) = \frac{4}{6}$$

기댓값 $\displaystyle E(X) = \sum_{x \in R_X} x\, p(x) = 4\, p(4) + 2\, p(2) = 4 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

– X 가 연속확률변수인 경우도 다음을 만족하는 확률밀도함수 $f(x)$가 존재한다.

a) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

c) 모든 $a \leq b$에 대하여, $Pr[a \leq X \leq b] = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$

- X 가 연속확률변수인 경우 $Pr[X = x] = 0$ 이므로 $f(x)$ 를 $Pr[X = x]$ 로 표현 않음
- 매우 작은 값 Δx 에 대하여

$$Pr[x \leq X \leq x + \Delta x] = Pr[x \leq X \leq x + \Delta x] = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx \approx f(x)\,\Delta x$$

2.1.2 누적분포함수 (CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION, CDF)

– 확률변수 X 에 대한 누적분포함수 $F : R_X \to [0, 1]$를 아래와 같이 정의 :

$$F(x) = Pr[X \leq x]$$

– X 가 연속확률변수이고 $f(x)$ 가 확률밀도함수이면

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

2.1.3 기댓값 (Expectation, 평균 mean)

– 확률변수 X 의 확률밀도함수가 $f(x)$ 일 때, 기댓값(평균) $E(X)$를 아래와 같이 정의 :

$$E(X) = \begin{cases} \sum x f(x) & (\text{이산}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx & (\text{연속}) \end{cases}$$

기댓값 $E(X)$는 X가 취할 수 있는 모든 가능한 값의 가중평균 (가중치 $f(x)$)

a) $E(c) = c$, c는 상수

b) $E(aX + b) = aE(X) + b$, a, b는 상수

c) $E(u(X) + v(X)) = E(u(X)) + E(v(X))$, u, v는 X의 함수

$$E(u(X)) = \sum_x u(x) f(x) \quad \text{또는} \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x) dx$$

역함수 미분법

$y = u(x)$에 대한 역함수 $x = u^{-1}(y)$의 미분법

$$\frac{dx}{dy} = (u^{-1})'(y) = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{u'(x)} = \frac{1}{u'(u^{-1}(y))}$$

$Y = u(X)$ 의 pdf $g(y)$

X 의 pdf가 $f(x)$ 일 때, $Y = u(X)$ 의 pdf $g(y)$ 를 구하기.

(Hint. Y 의 cdf $G(y)$ 를 구하고 이를 미분하여 Y 의 pdf $g(y)$ 를 구한다)

$$G(y) = Pr(Y \le y) = Pr\big(u(X) \le y\big) = Pr\big(X \le u^{-1}(y)\big) = \int_{-\infty}^{u^{-1}(y)} f(x)\,dx$$

이를 미분하면

$$g(y) = G'(y) = f(u^{-1}(y))\,(u^{-1})'(y) \text{ 이 된다.}$$

이 때, Y 의 기댓값 $E(Y) = E(u(X))$:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\,g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\,f(u^{-1}(y))\,(u^{-1})'(y)dy$$

$y = u(x)$ 치환하고 역함수 미분법을 사용하면

$$E(u(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} y\,g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,f(x))\,\frac{dx}{dy}dy = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,f(x)\,dx$$

2.1.4 분산(VARIANCE)과 표준편차(STANDARD DEVIATION)

– 분산(variance) $Var(X)$: 확률변수 X 의 평균이 μ 일 때, X 의 편차제곱의 평균

$$Var(X) = E\big((X-\mu)^2\big) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx, \quad (\text{표기: } \sigma^2 \text{ or } \sigma_X^2)$$

– X 의 표준편차 σ : 분산의 양의 제곱근을 취한 것으로 X 의 흩어짐의 척도

a) $Var(X) = E\big((X-\mu)^2\big) = E(X^2) - \mu^2$

b) $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$, a, b 는 상수

– 확률변수 X 의 평균이 μ 이고 분산이 σ^2 일 때 $X \sim (\mu, \sigma^2)$ 로 표기

- 주식과 같은 투자자산의 경우 과거의 주가 데이터로부터 계산된 수익의 산술평균을 수익의 기댓값이라 하면
- 분산은 이 수익이 해를 거치면수 평균을 중심으로 얼마나 변동하는지를 측정
- 해를 지나면서 주식수익의 변화폭이 클수록 분산도 커진다
- 수익의 분산과 표준편차는 투자위험도의 대체적인 지표

2.2 확률분포 (Probability distribution)

2.2.1 이항분포 (binomial distribution)

베르누이시행 (Bernoulli trial)

어떤 실험이 똑같은 조건에서 여러 번 반복되고, 각 실험마다 출현 결과가 두가지 뿐인 경우

두 가지 결과 : 성공 (S, 확률 p), 실패 (F, 확률 $1-p$)

이항분포 $X \sim b(n,p)$

대표적인 이산확률분포로 베르누이시행을 독립적으로 n 번 반복했을 때,

확률변수 X 를 n 번의 시행중에서 성공인 횟수를 대응시키는 함수로 정의

X 의 pdf $\quad f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots, n$

$E(X) = np, \quad Var(X) = np(1-p)$

푸아송분포 (Poisson distribution)

단위시간당 또는 단위공간당 사건의 발생횟수에 적용되는 확률분포

(예) 일정기간 동안 은행창구를 찾는 고객의 수

어떤 양의 실수 λ를 모수로 갖는 이산확률변수 X의 pdf가 아래와 같이 주어진다

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots ,$$

$$E(X) = \lambda, \quad Var(X) = \lambda$$

- 이항분포 $b(n, p)$에서 $np = \lambda$를 따르면서 n이 매우 큰 수로 증가할 때

예제

어느 보험회사가 10,000개의 주택을 보험에 가입시켰는데 1년 동안에 한 주택에 화재가 발생할 확률이 $\frac{1}{5{,}000}$이다. 10,000개의 주택 중에서 3개 이상의 주택에서 화재가 발생할 확률

$$\lambda = np = 10,000 \times \frac{1}{5,000} = 2 \quad \Rightarrow \quad p(x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!}$$

확률 : $1 - \big(p(0) + p(1) + p(2) \big) = 0.3233$

2.2.2 정규분포 (NORMAL DISTRIBUTION)

정규분포 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

가장 중요한 연속확률분포로 응용빈도가 높은 확률분포로 X 의 pdf $f(x)$ 가 주어진다

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \qquad \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{\beta}} dx = \sqrt{\beta\,\pi} \right)$$

$$E(X) = \mu, \quad Var(X) = \sigma^2$$

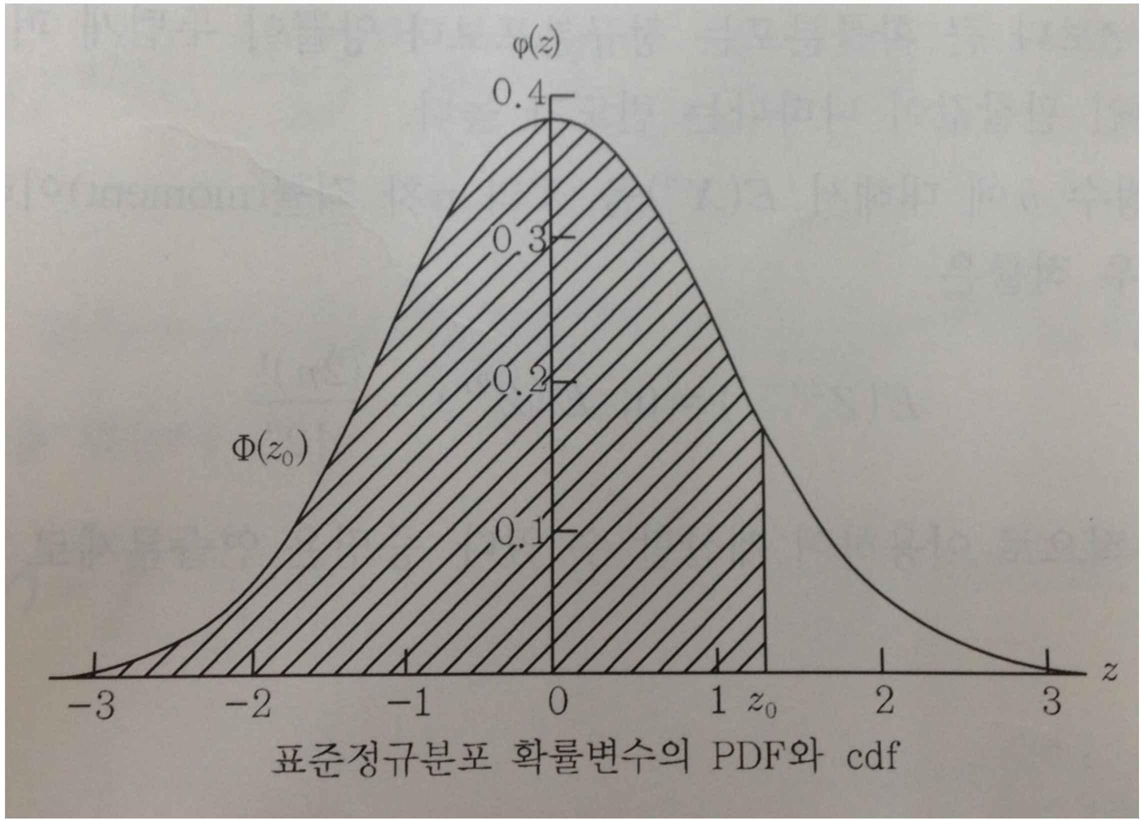
표준정규분포 $Z \sim N(0, 1)$

모든 정규분포 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 를 아래와 같이 표준화할 수 있다.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{이면} \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Z 의 확률밀도함수 pdf $\quad \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < \infty$

Z 의 누적확률밀도함수 cdf $\quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$



$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$$

- 확률변수 $X \sim (\mu, \sigma^2)$, $\quad Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

$$\boxed{\text{비대칭도 (왜도, skewness)}\ E(Z^3) = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]}$$

– 확률분포의 비대칭성을 나타내는 척도

– 양의 값 : 오른쪽으로 긴 꼬리, 음의 값 : 왼쪽의로 긴 꼬리

$$\boxed{\text{첨도 (Kurtosis)}\ E(Z^4) = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right]}$$

– 확률분포 pdf의 뾰족한 상태를 나타내는 척도

– 첨도가 크면 : 뾰족하고 두터운 꼬리, 첨도가 작으면 : 낮은 봉우리와 가는 꼬리

– $Z \sim N(0,1)$ 가 표준정규분포인 경우 왜도는 0 이고 첨도는 3 이다.

$$E(Z) = 0, \quad E(Z^2) = 1, \quad E(Z^3) = 0, \quad E(Z^4) = 3$$

$$\boxed{X \text{ 의 } n \text{ 차 적률 (moment)} : E(X^n)}$$

$$Z \sim N(0,1) \quad \Rightarrow \quad E(Z^{2n-1}) = 0, \quad E(Z^{2n}) = \frac{(2n)!}{n!\,2^n}$$

2.2.3 로그정규분포 (LOG-NORMAL DISTRIBUTION)

– 확률변수 X 가 정규분포를 따를 때, $Y = e^X$ 를 로그정규분포라고 한다.

$$Y = e^X \text{ 로그정규분포} \quad \Longleftrightarrow \quad \ln Y = X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned}
E(Y) = E(u(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2(\mu+\sigma^2)x + \mu^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{[x-(\mu+\sigma^2)]^2 - 2\mu\sigma^2 - \sigma^4}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{[x-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right) dx
\end{aligned}$$

– $Y = e^X$ 의 기댓값 : $E(Y) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$

– $X \sim N(\mu, \sigma^2) \;\Rightarrow\; X_t = tX \sim N(\mu t, \sigma^2 t^2)$

$$\Rightarrow\; E(e^{X_t}) = E(e^{tX}) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

$$E(Y^2) = E\left[(e^X)^2\right] = E(e^{2X}) = \exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right)$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

$Y = e^X$ 의 분산 : $Var(Y) = (e^{\sigma^2} - 1)E(Y)^2 = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$

$Y = e^X$ 의 표준편차 : $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}\, E(Y)$

– $Y = e^X \;\Rightarrow\; \ln Y = X \sim N(\mu, \sigma^2)$

누적분포함수 $G(y) = Pr(Y \le y) = Pr(e^X \le y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y \le 0 \\ Pr(X \le \ln y) & \text{if } y > 0 \end{cases}$

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\ln y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (y > 0)$$

– $Y = e^X$ 의 확률밀도함수 $g(y) = G'(y)$

$$g(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (y > 0), \qquad g(y) = 0 \quad (y \le 0)$$

2.2.4 적률생성함수 (MOMENT GENERATING FUNCTION, MGF)

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx \qquad (\ f(x)\text{는 } X\text{의 확률밀도함수 })$$

$$M'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f(x)\, dx, \quad M^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{tx} f(x)\, dx$$

– X 의 n 차 적률 $E(X^n) = M^{(n)}(0)$

– 정규분포 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 의 적률생성함수를 이용한 기댓값과 분산 구하기

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

$$M_X'(t) = (\mu + \sigma^2 t) M(t), \quad M_X''(t) = (\mu + \sigma^2 t)^2 M_X(t) + \sigma^2 M_X(t)$$

$$\Rightarrow E(X) = M_X'(0) = \mu, \quad E(X^2) = M_X''(0) = \mu^2 + \sigma^2 \quad Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sigma^2$$

– **적률생성함수의 유일성** : $M_X(t) = M_Y(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y)$ (동일확률분포)

– 두 정규분포 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 과 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 에 대하여 $X + Y$ 도 정규분포

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \quad : \quad \text{정규분포의 가법성}$$

2.3 독립성과 상관성

결합확률밀도함수 (joint pdf)

– 두 연속확률변수 X 와 Y 의 결합확률밀도함수 $f(x,y)$는 다음을 만족한다.

a) 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x,y) \geq 0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$

c) 모든 $a < b$ 와 $c < d$ 에 대하여 $Pr[a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d] = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$

– X 와 Y 의 결합분포함수 (joint distribution function) $F(x,y)$

$$F(x,y) = Pr[X \leq x, Y \leq y] = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(s,t)dsdt$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

– 확률변수 $u(X,Y)$ 의 기댓값

$$E[u(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)\,f(x,y)\,dxdy$$

2.3.1 확률변수의 독립성

– 같은 표본공간 내의 두 사건 A, B 가 있을 때, 서로의 발생여부가 관계없을 때 서로 독립

$$\text{A와 B가 서로 독립} \quad \Longleftrightarrow \quad Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B)$$

– 두 확률변수 X 와 Y 의 독립성

$$X \text{ 와 } Y \text{ 가 서로 독립} \quad \Longleftrightarrow \quad Pr[X \leq x, Y \leq y] = Pr(X \leq x)\, Pr(Y \leq y)$$

a) $f(x, y) = g(x)h(y)$, ($g(x), h(y)$ 는 각각 X 와 Y 의 pdf)

b) $E(XY) = E(X)E(Y)$

c) $u(X)$ 와 $v(Y)$ 도 서로 독립 $\longrightarrow$ $E[u(X)v(Y)] = E[u(X)]\, E[v(Y)]$

2.3.2 코시-슈바르츠의 부등식 (Cauchy-Schwarz inequality)

Vector공간 : $<\mathbf{x},\mathbf{y}>$가 내적일 때, $\;|<\mathbf{x},\mathbf{y}>|^2 \le <\mathbf{x},\mathbf{x}><\mathbf{y},\mathbf{y}>$

U, V가 확률변수일 때, 다음의 코시-슈바르츠의 부등식이 성립한다.

$$E[UV]^2 \le E[U^2]\,E[V^2]$$

Proof)

$E[V^2]=0$이면 $V=0$이고 $E[V]=0=E[UV]$로 성립하므로 $E[V^2]\neq 0$이라고 가정하자

임의의 λ에 대하여 다음이 성립한다

$$0 \le E[(U-\lambda V)^2] = E[U^2] - 2\lambda E[UV] + \lambda^2 E[V^2]$$

$\lambda = \dfrac{E[UV]}{E[V^2]}$을 대입하면

$$0 \le E[U^2] - 2\frac{E[UV]^2}{E[V^2]} + \frac{E[UV]^2}{E[V^2]} = E[U^2] - \frac{E[UV]^2}{E[V^2]}$$

그러므로 $\quad E[UV]^2 \le E[U^2]\,E[V^2]$. ■

2.3.3 공분산(COVARIANCE)과 상관계수(CORRELATION COEFFICIENT)

– 공분산과 상관계수는 두 확률변수의 선형관계의 정도를 측정하는 도구

$\boxed{\text{공분산} \quad cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}$ (표기 σ_{XY})

- 두 편차 곱의 평균
- 양의 공분산 : 서로 같은 방향으로 움직임.
- 음의 공분산 : 서로 다른 방향으로 움직임.
- $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, $cov(X,X) = Var(X)$, $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
- X 와 Y 가 서로 독립이면, $cov(X,Y) = 0$
- $cov(X,Y) = 0$ 이라고 하더라도 X 와 Y 가 서로 독립이라고 할 순 없다

  예) $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$ 이면 매우 밀접한 종속관계이지만 $cov(X,Y) = E(X^3) = 0$
- 공분산은 금융포트폴리오의 위험도를 측정하는 지표

상관계수 $\rho = \rho(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}$

σ_X, σ_Y 는 각각 X 와 Y 의 표준편차

- 공분산의 값을 -1 과 1 사이의 값으로 표준화
- 코시-슈바르츠부등식에 $U = X - \mu_X$, $V = Y - \mu_Y$ 를 대입하면

$$cov(X,Y)^2 \le \sigma_X^2\,\sigma_Y^2 \quad\longrightarrow\quad -1 \le \rho \le 1$$

- X 와 Y 가 독립이면 $\rho = 0$
- 상관계수의 부호는 선형관계의 방향을 알려주며
- 상관계수의 절댓값은 선형관계의 정도까지 나타냄
- 완전한 선형관계에 있다면 상관계수의 절대값이 1 이 됨

$a, b(a \ne 0)$ 가 상수이고 $Y = aX + b$ 이면 $\rho = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$

$$(\because)\quad \mu_Y = a\mu_X + b,\ \sigma_Y = |a|\,\sigma_X$$

$$cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(aX + b - \alpha\mu_X - b)] = aE[(X-\mu_x)^2] = a\,\sigma_X^2$$

$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{a}{|a|} = 1 \text{ or } -1$$

참고정리 기댓값, 분산, 공분산의 정의 이용

- 확률변수들의 합의 기댓값은 각 변수들의 기댓값의 합(선형성)
- 확률변수들의 합의 분산은 각 변수들의 분산의 합과 같지 않음(일반적으로)
- 단, 서로 독립인 확률변수들의 합의 분산은 각 변수들의 분산의 합과 같음
- $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$
- $Var(aX + bY + c) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab\, cov(X, Y)$
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 이 확률변수이면

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k)$$

$$Var\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j a_k\, cov(X_j, X_k)$$

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 이 서로 독립인 확률변수이면 $cov(X_j, X_k) = 0\ (j \neq k)$

$$Var\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2\, Var(X_k)$$

2.4 중심극한정리 (Central limit theorem)

– 드 므와브르 (de Moivre) : X 가 이항분포 $X \sim b(n, 1/2)$ 를 따를 때, n 이 충분히 크면 X 는 근사적으로 정규분포와 같은 종 모양 (bell shape) 의 분포

– 라플라스 (Laplace) : $p \neq 1/2$ 일 때도 성립함을 수학적으로 증명

$X \sim b(n, p)$ 이고 n 이 충분히 크면 근사적으로 $X \sim N\big(np, np(1-p)\big)$

– 가우스 (Gauss) : 라플라스정리를 중심극한정리로 발전 (확률통계이론에서 가장 핵심)

독립동일분포 (i.i.d. : independently identically distributed)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 이 독립이고 동일한 확률분포를 따르는 확률변수일 때

- 모든 k 에 대하여 $X_k \sim (\mu, \sigma^2)$ 이면 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim i.i.d.(\mu, \sigma^2)$ 로 표기

– $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim i.i.d.(\mu, \sigma^2)$ 일 때,

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim (n\mu, n\sigma^2) \text{ 이고 } \quad \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim (0, 1)$$

– $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim i.i.d.(0, 1)$ 이면 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim (0, n)$ 이다

2.4.1 대수의 법칙 (LAW OF LARGE NUMBERS)

– $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim i.i.d.(\mu, \sigma^2)$ 일 때,

- 확률변수 $\mathbb{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 의 기댓값과 분산 : $E(\mathbb{X}) = \mu, \quad Var(\mathbb{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

  이 때, 극한 $n \to \infty$ 을 취하면 $E(\mathbb{X}) \to \mu, \quad Var(\mathbb{X}) \to 0$

대수의 법칙

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim i.i.d.(\mu, \sigma^2)$ 일 때, 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \le \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} Pr\left(|\mathbb{X} - \mu| \le \varepsilon\right) = 1$$

– 측정 대상의 숫자 또는 측정 횟수가 많아지면 많아질수록 결과가 예상결과에 가까워짐

– 주사위를 굴려서 1이 나오는 확률은 굴리는 회수를 늘리면 늘릴수록 1/6에 가까워짐

– 보험에서는 화재의 발생률, 교통사고의 발생률, 연령별 사망률 등의 현상을

  일정기간동안 관찰하면 장래의 발생확률을 예측할 수 있다.

2.4.2 중심극한정리

중심극한정리

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim i.i.d.(\mu, \sigma^2)$ 이면 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \sim (n\mu, n\sigma^2)$ 이고

$$Y_n := \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \longrightarrow \text{표준정규분포 } Z \sim N(0,1) \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

– 임의의 실수 z 에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} Pr\,(\,Y_n \le z\,) := \lim_{n\to\infty} Pr\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le z\right) = \Phi(z) := \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

– 즉, 누적분포함수의 극한으로 보면 다음을 만족한다

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(z) = \lim_{n\to\infty} Pr\,(\,Y_n \le z\,) = Pr\,(\,Z \le z\,) = \Phi(z)$$

이 때, Y_n 은 Z 에 분포수렴 (converge in distribution) 한다고 정의한다.

– Y_n 의 적률생성함수는 표준정규분포 Z 의 적률생성함수로 수렴함을 보임으로 증명

즉, $\quad M_{Y_n}(t) = E(e^{tY_n}) \;\to\; e^{\frac{t^2}{2}} = E(e^{tZ}) = M_Z(t) \quad \Rightarrow \quad Y_n \to Z$ (분포수렴)

2.5 다변량정규분포 (MULTIVARIATE NORMAL DISTRIBUTION)

2.5.1 확률벡터의 확률분포

– $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ 이 $n \times 1$ 인 확률벡터이고, $E(X_k) = \mu_k, \; Var(X_k) = \sigma_k^2, \; cov(X_j, X_k) = \sigma_{jk}$

– **확률벡터의 확률분포 표기** : $\mathbb{X} \sim (\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$

- $\mathbb{X}$의 평균 $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$, $\mathbb{X}$의 공분산 $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$

- 공분산행렬은 대칭행렬 : $\Sigma^T = \Sigma$

행렬과 확률벡터 곱의 확률분포

n 차원 확률벡터 $\mathbb{X} \sim (\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ 와 $m \times n$ 행렬 A 에 대하여

$$A\,\mathbb{X} \ \sim \ (A\,\boldsymbol{\mu},\ A\,\Sigma\,A^T)$$

– (예) $X \sim (\mu_1, \sigma_1^2)$, $\quad Y \sim (\mu_2, \sigma_2^2)$

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A\,\mathbb{X} = aX + bY$$

$$E(A\,\mathbb{X}) = a\mu_1 + b\mu_2 = A\,\boldsymbol{\mu}$$

$$Var(A\,\mathbb{X}) = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2 + 2ab\sigma_{12} = A\,\Sigma\,A^T$$

2.5.2 다변량 정규분포

다변량 정규분포 $\mathbb{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$

n 차원 확률벡터 $\mathbb{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^T$ 가 임의의 상수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ 가 정규분포를 따를 때, $\mathbb{X}$ 를 다변량 정규분포라고 한다.

– $\mathbb{X}$ 의 결합확률밀도함수는 아래와 같다. $(\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n))$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

– X_k 들이 서로 독립인 정규분포이면 가법성에 의하여 항상 다음이 성립한다.

- 정규분포 $\sum_{k=1}^{n} a_k X_k \sim (\sum a_k \mu_k, \sum a_k^2 \sigma_k^2)$
- $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{(x_k - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}\right)$

– n 차원 확률벡터 $\mathbb{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ 와 $m \times n$ 행렬 A 에 대하여

$$A\mathbb{X} \ \sim \ N_m(A\,\boldsymbol{\mu},\ A\,\Sigma\,A^T) \quad \text{다변량 정규분포}$$

$A\mathbb{X}$ 는 각각의 성분이 X_k 들의 일차결합인 m 차원 확률벡터

3 옵션가격이론

연속시장모형 아래 주식, 주가지수 및 환율 등 금융기초자산에 대한 유러피언 옵션의 가격이론은 전개한다.
블랙-숄즈 공식을 비롯한 옵션의 적정가격에 관한 식을 위험중립 가치평가에 의하여 찾고자 한다.

3.1 주가의 확률분포

3.1.1 주가의 확률분포

– $\ln Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ 일 때, 확률변수 Y 의 기댓값은 $E(Y) = e^{\mu+\sigma^2/2}$ 이고

확률밀도함수는 $$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\dfrac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), & y > 0, \\ 0, & else \end{cases}$$

표준정규분포의 누적확률분포 : $\Phi(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

정리 3.1

확률변수 Y 의 분포가 $\ln Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ 일 때, 임의의 양의 실수 K 에 대하여 다음이 성립한다.

$$E[\max(Y-K,0)] = e^{\mu+\sigma^2/2}\,\Phi(d_1) - K\,\Phi(d_2)$$

여기서, Φ 는 누적분포함수이고

$$d_1 = \frac{\mu+\sigma^2-\ln K}{\sigma}, \quad d_2 = \frac{\mu-\ln K}{\sigma} = d_1 - \sigma \qquad \blacksquare$$

- 정리 3.1로부터 유러피언 옵션형 파생상품의 가격을 구하는 데 매우 유용한 정리 3.2를 얻는다.

정리 3.2 [주가, 주가지수 및 상품가격 등 대다수의 기초자산이 로그정규분포]

$\ln V$ 가 정규분포를 따르고 표준편차가 m 이면 임의의 양의 실수 K 에 대해서 다음이 성립한다.

$$E[\max(V-K,0)] = E(V)\,\Phi(d_1) - K\,\Phi(d_2)$$

여기서,

$$d_1 = \frac{\ln(E(V)/K)+m^2/2}{m}, \quad d_2 = \frac{\ln(E(V)/K)-m^2/2}{m} = d_1 - m \qquad \blacksquare$$

- 정리 3.1과 정리 3.2는 사실상 똑같은 정리이다

3.1.2 주가모형

어느 기업의 현재 주가가 S_0, 임의의 미래시점 T 에서 주가의 확률분포를 구해보자

– $[0, T]$ 의 균등분할 : $\quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$

– t_k 시점에서 주가 S_k, $\quad S_T = S_n$

– 상수 $u > 1, \quad 0 < d < 1$

– S_{k-1} 은 이전의 모든 시점과 독립적으로 다음 시점 t_k 에서

$$\begin{tikzcd} & S_k = u \cdot S_{k-1} \\ S_{k-1} \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\ & S_k = d \cdot S_{k-1} \end{tikzcd}$$

– $X_k = \dfrac{S_k}{S_{k-1}}$ 은 서로 독립이고 $Pr(X_k = u) = p, \quad Pr(X_k = d) = 1 - p$

– $X_k \ (k = 1, 2, \cdots)$: 독립동일분포 $(i.i.d)$, $\quad \ln X_k$: 독립동일분포 $(i.i.d.)$

– 시점 T 의 주가 $S_T = S_n$ 은

$$\ln S_T = \ln S_0 + \sum_{k=1}^{n} (\ln S_k - \ln S_{k-1}) = \ln S_0 + \sum_{k=1}^{n} \ln X_k$$

$\Rightarrow \quad \ln S_T$ 의 분산은 $\ln X_k$ 분산의 n 배 (즉, 기간 T 에 비례)

– n 이 큰 자연수이므로 중심극한정리에 의하여 $\ln S_T$ 는 근사적 정규분포를 따름

– $\ln S_T$ 는 정규분포를 따르며 분산은 T 에 비례하므로 $\sigma^2 T$ (σ 는 적당한 양의 상수)

$\ln S_T$ 는 정규분포를 따르며 표준편차가 $\sigma\sqrt{T}$ 로 표기됨

– S 가 주가 대신 상품가격, 환율, 이자율 등 기초자산의 가격이라고 해도 같은 논리 적용

주가모형

어느 기업의 미래시점 T 의 주가를 S_T 라 할 때, 적당한 양의 상수 σ 가 있어 $\ln S_T$ 는 정규분포를 따르며 표준편차가 $\sigma\sqrt{T}$ 임을 가정하는 것이 일반적이다.
이 때의 σ 는 해당 기업 주식의 고유한 속성을 반영하는 상수이며 주가의 변동성 (volatility) 이라 정의된다.
변동성 σ 는 해당 기업의 미래주가 움직임에 해한 불확실성을 나타내는 지표이고, 변동성이 큰 주식은 상대적으로 주가가 큰 폭으로 상승하거나 하락할 가능성이 높다

3.1.3 변동성과 주가의 확률분포

– 옵션의 가격은 변동성에 크게 영향을 받는다.

– 콜옵션의 보유자는 주가가 크게 상승하는 경우에 상승폭에 비례하는 큰 이득을 보는 반면 주가가 크게 하락해도 하락폭에 비례하는 큰 손해를 보지 않는다.

옵션의 가치 $= (S_T - K)^+ - P$, P는 프리미엄

– 변동성이 큰 주식에 대한 콜옵션의 가격은 높게 책정되며, 풋옵션도 마찬가지이다

– 변동성은 옵션의 가격을 결정하는 가장 중요한 요인이며, 과거 주가의 움직임으로 추정

위험중립세계에서 주가의 확률분포 (무배당 주식의 가격 S_t)

– $\ln S_t$ 의 기댓값을 $a(t)$ 라고 놓으면,

$$\ln S_t = X_t \sim N(a(t), \sigma^2 t)$$

$$S_t \text{ 의 기댓값} \quad E_Q(S_t) = E_Q(e^{X_t}) = \exp\left(a(t) + \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$$

– 위험중립세계에서 무배당주식에 대한 주가의 기댓값은

$$E_Q(S_t) = S_0\, e^{rt} = \exp(\ln S_0 + rt) \quad \Rightarrow \quad a(t) = \ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t$$

$$\ln S_t \sim N\left(\ln S_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t\right) \text{ : 위험중립세계 무배당주식의 주가 분포}$$

– 실제세계에서는 한계효용체감의 원칙이 적용되어 무위험이자율 r 을 초과하는 어떤 μ 가 존재

$$\ln S_t \sim N\left(\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t\right) \text{ : 실제세계 무배당주식의 주가 분포}$$

– $E(S_t) = S_0 e^{\mu t}$: 상수 μ 는 주식의 기대수익률 – μ 도 해당 주식의 고유한 특성을 대표

– 하지만, 위험중립세계에서 주가의 확률분포는 기대수익률 μ 를 포함하지 않는다

– 주식에 대한 각종 파생상품의 적정가격에는 주식의 기대수익률 μ 가 반영되지 않는다

– 실제세계와 위험중립세계 모두 주가는 로그정규분포를 따르고 $\ln S_T$ 의 표준편차는 $\sigma\sqrt{T}$

$$\boxed{\text{Set } E(\ln S_t) = a(t) \quad \Rightarrow \quad E_Q(S_t) = \exp\left(a(t) + \frac{\sigma^2 t}{2}\right)}$$

연속배당률 q의 배당 지급 주식

$$E_Q(S_t) = S_0\, e^{(r-q)t} = \exp\big(\ln S_0 + (r-q)t\big)$$

$$\Rightarrow \quad \ln S_t \sim N\left(\ln S_0 + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t\right) : \text{위험중립세계 연속배당 주식의 주가 분포}$$

$$\Rightarrow \quad \ln S_t \sim N\left(\ln S_0 + (\mu - q - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t\right) : \text{실질세계 연속배당주식의 주가 분포}$$

- 앞의 이항모형에서는 각 시점의 주가가 독립적으로 움직이고 상승확률도 시점에 관계없이 동일하다고 가정
- 실제세계에서는 주가의 상승 또는 하락추세가 분명한 양 극단의 시점에서는 매 순간 주가 비율의 이항모형이 서로 완전히 독립적이지 않기 때문에 중심극한정리를 사용하여 얻은 로그정규분포는 주가의 양 극단에서 현실과 동떨어지게 되는 경우가 발생

예제

어느 무배당주식의 현재가격이 50달러이고, 주식의 기대수익률이 연 15%, 변동성이 연 20%일 때, 6개월 후의 주가의 95%의 신뢰구간을 구하여라.

– 95%의 신뢰구간

$$\mu - 1.96\,\sigma < \ln S_T < \mu + 1.96\,\sigma$$

– 99%의 신뢰구간

$$\mu - 2.58\,\sigma < \ln S_T < \mu + 2.58\,\sigma$$

3.2 변동성과 블랙-숄즈 공식

3.2.1 블랙-숄즈 공식

– 블랙-숄즈 옵션가격공식 : 무배당 주식에 대한 유러피언 콜옵션의 적정가격 구하는 식

1973년 Fisher Black and Myron Scholes의 공동논문

무배당주식의 선도매수계약의 적정현재가치 f_0

S가 무배당주식의 가격이고 만기 payoff이 단순히 $S_T - K$로 주어질 때

$$f_0 = e^{-rT} E_Q(S_T - K) = e^{-rT}(e^{rT} S_0 - K) = S_0 - K\, e^{-rT}$$

– 만기 페이오프가 단순히 $S_T - K$가 아니라 $\max(S_T - K, 0)$로 주어지는 유러피언 콜옵션의 현재적정가치는 훨씬 복잡하며 블랙-숄즈의 공식으로 구할 수 있다.

블랙-숄즈 옵션공식

[유러피언 콜옵션의 현재적정가치]

무배당 주식의 현재가격이 S_0 이고 무위험이자율이 상수 r 로 주어졌을 때, 해당 주식에 대한 만기 T, 행사가격 K 인 유러피언 콜옵션의 현재적정가격 c_0 는 다음과 같다.

$$c_0 = S_0\,\Phi(d_1) - K\,e^{-rT}\,\Phi(d_2)$$

여기서,

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

시점 t 에서의 가격 c_t 는

$$c_t = S_t\,\Phi(d_1) - K\,e^{-r(T-t)}\,\Phi(d_2)$$ 여기서,

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)\,(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \sigma^2/2)\,(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad \blacksquare$$

증명

– 위험중립가치평가에 의하면 콜옵션의 현재가격 공식

$$c_0 = e^{-rT} E_Q[\max(S_T - K, 0)]$$

– $E_Q(S_T) = S_0\, e^{rT}$ 이고 $\ln S_T \sim N\big(a(T), \sigma^2 T\big)$ 이므로, 정리 3.2로 부터

$$c_0 = e^{-rT} E_Q[\max(S_T - K, 0)] = e^{-rT} \left(S_0\, e^{rT}\, \Phi(d_1) - K\, \Phi(d_2)\right)$$

여기서,

$$d_1 = \frac{\ln(S_0\, e^{rT}/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S_0\, e^{rT}/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

– 위의 식을 정리하면 블랙-숄즈 공식이 성립

– $t > 0$ 인 경우 옵션의 잔여만기는 $T - t$ 이고 현재주가는 $S = S_t$ 이므로 대입하면 성립한다.

– 위의 d_1 과 d_2 는 옵션의 성격과 기초자산의 배당 등의 특성에 따라 다른 값을 갖는다. ■

예제

어느 기업의 현재주가가 100달러일 때, 만기 1년에 행사가격이 100달러인 유러피언 콜옵션의 현재적정가격을 구하여라. 단, 연속복리기준 무위험이자율은 연 5%, 주식의 변동성은 연 15%이고 1년 동안 배당은 없다.

$S_0 = 100,\ K = 100,\ r = 0.05,\ T = 1,\ \sigma = 0.15$

d_1, d_2를 구하고 공식에 대입하면 현재적정가격은 8.596달러

3.2.2 내재변동성과 변동성 미소

– 블랙-숄즈 공식 : 무배당주식에 대한 유러피언 콜옵션의 적정가격은 주식의 기대수익률과는 무관하고, 현재주가 S, 잔여만기 T, 행사가격 K, 무위험이자율 r, 변동성 σ 변수에 의존

– 객관적인 관측이 불가능한 것은 σ 가 유일하고, 과거의 자료로 부터 추정 => 역사적 변동성

변동성 (σ) 을 구하는 방법

블랙-숄즈 공식 가정

– 옵션가격에 반영된 변동성을 역산하는 방식 (알고있는 다섯가지 c, S, T, K, r 를 이용)

– 동일옵션에 대해 S, T, K, r 를 고정되었을 때,

옵션가격 c 는 변동성 σ 에 대한 증가함수 :

$$c = f(\sigma) => \sigma = f^{-1}(c)$$

– 위와 같이 구한 변동성을 **내재변동성**

– 역함수를 찾는 것은 어려우므로 반복탐색법 또는 시행착오법으로 찾음

내재변동성 찾는 예제(반복탐색법)

무위험이자율 연 10%이고 3개월 동안 배당이 없는 어느 주식의 현재주가가 35달러, 옵션의 잔여만기가 3개월, 행사가격이 34달러인 유러피언 콜옵션이 시장에서 2.6달러에 거래될 때, 내재변동성을 구해보자.

- $S_0 = 35$, $T = 1/4$, $K = 34$, $r = 0.10$, $c_0 = 2.6$
- 블랙-숄즈 공식 : $c_0 = S_0\,\Phi(d_1) - K\,e^{rT}\,\Phi(d_2)$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- σ를 적당히 대입하여 $c_0 = 2.6$이 나오도록 반복탐색한다.
- $\sigma = 0.20 \Rightarrow c = 2.47$, $\sigma = 0.25 \Rightarrow c = 2.77$, $\sigma = 0.22... \Rightarrow c = 2.6$, $\cdots$
- 반복을 하여 근사값 $\sigma_0 = 0.222$을 구함

- 내재변동성은 행사가격이 달라짐에 따라 다른 내재변동성이 대응
- 이는 개별 주식의 변동성이 고유의 상수라고 가정하고 옵션의 가격을 구한 블랙-숄즈 공식이 현실세계에서 불완전하다는 것을 의미

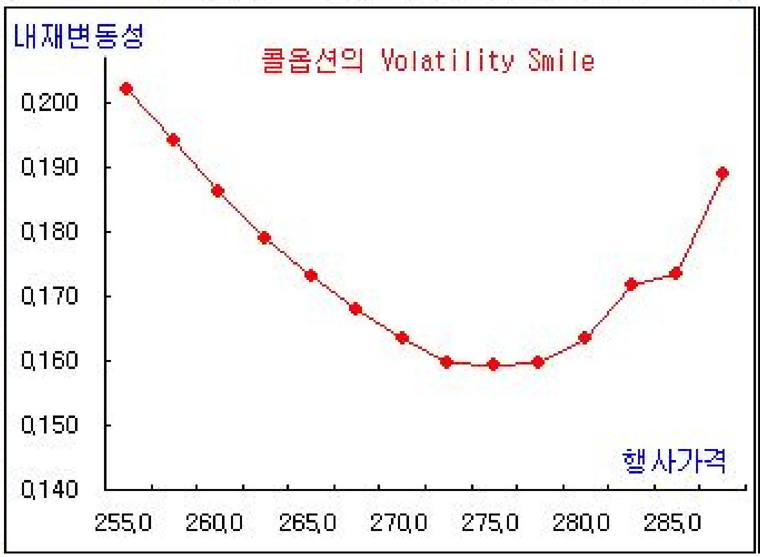
잔존기간 (T)	0.0384
이자율 (Rf)	0.0354
기초자산 (S)	261.67

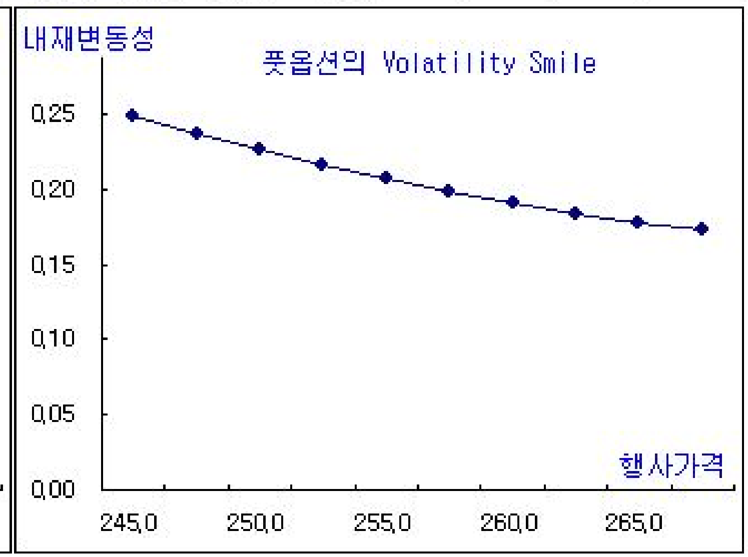
Call

행사가격 (X)	255.0	257.5	260.0	262.5	265.0	267.5	270.0	272.5	275.0	277.5	280.0	282.5	285.0	287.5
시장가 (C)	8.51	6.60	4.89	3.43	2.27	1.40	0.80	0.42	0.22	0.11	0.06	0.04	0.02	0.02
계산가	8.51	6.60	4.89	3.43	2.27	1.40	0.80	0.42	0.22	0.11	0.06	0.04	0.02	0.02
IV	0.202	0.194	0.186	0.179	0.173	0.168	0.164	0.160	0.159	0.160	0.163	0.172	0.173	0.189

Put

행사가격 (X)	245.0	247.5	250.0	252.5	255.0	257.5	260.0	262.5	265.0	267.5				
시장가 (C)	0.47	0.62	0.84	1.14	1.57	2.15	2.94	3.98	5.32	6.94				
계산가	0.47	0.62	0.84	1.14	1.57	2.15	2.94	3.98	5.32	6.94				
IV	0.25	0.24	0.23	0.22	0.21	0.20	0.19	0.18	0.18	0.17				





변동성 미소 (volatility smile)

– 실제로 내재변동성을 각 행사가격에 따라 구해 보면 행사가격이 낮은 주식 옵션의
  내재변동성은 등가격 옵션이나 행사가격이 높은 옵션의 내재변동성보다 크다

– 행사가격에 따른 내재변동성의 곡선은 미소 모양을 띠고 있음

– 블랙-숄즈 공식이 현실세계에서 불완전한 주된 이유 :
  상수변동성을 갖는 로그정규분포 주가모형이 실제주식시장을 정확하게 반영하지 못함

– 주식의 가격은 평상시에는 대체적으로 이론과 같이 로그정규분포를 따르지만
  가격의 양 극단에서는 실증적으로 두터운 꼬리를 갖는 분포를 따름

3.2.3 변동성 σ의 추정

– 6장에서 연구

3.2.4 풋-콜 패리티 (동등성)

– 무배당주식에 대한 만기 T, 행사가격 K 인 유러피언 풋옵션의 현재가격 p_0

위험중립가치평가 => $p_0 = e^{-rT} E_Q[\max(K - S_T, 0)]$

– 위의 풋옵션 현재가격을 콜옵션의 현재가격 c_0 를 이용하여 구해보자

풋-콜 등가 (parity)

– 포트폴리오 Π : 콜옵션 1계약 매도, 풋옵션 1계약 매수, 주식 1단위 매수

$$\Pi_0 = p_0 + S_0 - c_0$$

– 만기 T 시점에서 위 포트폴리오의 가치:

$$\Pi_T = \max(K - S_T, 0) + S_T - \max(S_T - K, 0) = \begin{cases} (K - S_T) + S_T - 0 = K, & S_T \le K \\ 0 + S_T - (S_T - K) = K, & S_T \ge K \end{cases}$$

– 즉, 만기 T 시점에서 포트폴리오의 가치는 항상 K 의 현금인 무위험 포트폴리오이다.

– 무차익원칙에 의해서 이 포트폴리오의 현재가치는 Ke^{-rT} 이므로

$$K\, e^{-rT} = p_0 + S_0 - c_0 \quad <= \Pi_0 = e^{-rT}\, \Pi_T$$

– 위 식을 일반적인 $t > 0$ 시점에 대하여 표현하면

$$p = c + K\,e^{-r(T-t)} - S$$

풋-콜 패리티를 이용한 풋옵션의 현재가격

– $p_0 = c_0 + K\,e^{-rT} - S_0$ 에서

– $c_0 = S_0\,\Phi(d_1) - K\,e^{-rT}\,\Phi(d_2) \quad \Rightarrow \quad p_0 = S_0\,\big(\Phi(d_1) - 1\big) + K\,e^{-rT}\,\big(1 - \Phi(d_2)\big)$

– $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ 이므로

$$p_0 = K\,e^{-rT}\,\Phi(-d_2) - S_0\,\Phi(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

3.3 배당주식에 대한 옵션가격

– 연속배당 수익률 q의 배당금을 지급하는 주식에 대한 유러피언 옵션의 적정가격:

Robert Merton의 1973년 논문에서 최초 소개 (Merton과 Scholes는 1997년 노벨경제학상)

– 주가지수옵션과 통화옵션은 그 구조가 배당지급 주식에 대한 옵션과 본질적으로 동일

3.3.1 배당주식에 대한 옵션가격공식

– 위험중립가치평가에 따라 콜옵션의 현재가치 $c_0 = e^{-rT}\, E_Q[\max(S_T - K, 0)]$

– 연속배당수익률 q 의 배당을 지급하는 주식의 주가의 기대성장률은 $r - q$ 이므로

(주가의 기대성장률 $r - q$) + (배당 수익률 q) = (주식의 기대수익률 r)

– 위험중립세계에서의 S_T 의 기댓값은

$E_Q(S_T) = S_0\, e^{(r-q)T}$ 이므로 정리 3.2에 의하여

$$\begin{aligned} c_0 &= e^{-rT}\, E_Q[\max(S_T - K, 0)] = e^{-rT}\left(E_Q(S_T)\,\Phi(d_1) - K\,\Phi(d_2)\right) \\ &= e^{-rT}\left(S_0\, e^{(r-q)T}\,\Phi(d_1) - K\,\Phi(d_2)\right) \end{aligned}$$

$$c_0 = S_0\, e^{-qT}\,\Phi(d_1) - K\, e^{-rT}\,\Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0\, e^{(r-q)T}/K) + \sigma^2\, T/2}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0\, e^{(r-q)T}/K) - \sigma^2\, T/2}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

– 주가가 S_0 대신 $S_0\, e^{-qT}$ 에서 시작하고 배당을 지급하지 않는 경우와 동일

3.3.2 풋-콜 패리티 (배당수익률 q)

– 연속배당수익률 q, 주식에 대한 만기 T, 행사가격 K 인 유러피언 풋옵션의 풋-콜 패리티를 찾아보자
(무배당주식에서 현재주식가 S_0 대신 $S_0\, e^{-qT}$ 를 대입하여 구하는 것과 동일)

풋-콜 등가 (parity)

– 포트폴리오 Π : 콜옵션 1 계약 매도, 풋옵션 1 계약 매수, 주식 e^{-qT} 단위 매수

$$\Pi_0 = p_0 + S_0\, e^{-qT} - c_0$$

– 만기 T 시점에서 위 포트폴리오의 가치 :

$$\Pi_T = \max(K - S_T, 0) + S_T - \max(S_T - K, 0) = K$$

– 즉, 만기 T 시점에서 포트폴리오의 가치는 항상 K 의 현금인 무위험 포트폴리오이다.

– 무차익원칙에 의해서 이 포트폴리오의 현재가치는 $K e^{-rT}$ 이므로

$$K\, e^{-rT} = p_0 + S_0\, e^{-qT} - c_0 \quad <= \Pi_0 = e^{-rT}\, \Pi_T$$

$$\Rightarrow \quad p_0 = c_0 + K\, e^{-rT} - S_0\, e^{-qT} = K\, e^{-rT}\, \Phi(-d_2) - S_0\, e^{-qT}\, \Phi(-d_1)$$

3.3.3 주가지수 옵션

– 주가지수 선물과 옵션은 거래소에서 거래되는 파생금융상품 중에서 비중이 높은 중요한 상품

– 지수를 현금단위로 환산해서 거래하기 위하여 지수 1포인트당 일정한 가치 부여

– KOSPI 200 지수옵션은 지수 1포인트당 1십만원의 가치 부여하여 거래

– 만기일에 권리가 행사되는 경우 만기일의 주가지수와 행사가격의 차이를 현금으로 결제

– 주가지수를 이루는 개별 주식들이 배당을 지급하는 경우 그 주식들의 주가에는 배당락이 적용되고 주가지수를 이루는 주식들의 시가총액이 그만큼 줄어든다.

– 개별 주식들의 주가의 가중평균으로 이루어진 주가지수는 예정된 수익률로 배당을 지급하는 투자자산의 가격으로 간주

– 선도가격과 선물가격을 동일시 한다면 q가 연속복리 기준으로 지수를 구성하는 주식의 평균배당수익률일 때, 주가지수의 현재 선물가격 F_0:

$$F_0 = S_0\, e^{(r-q)T} = E_Q(S_T)$$

– 위험중립세계에서 기대성장률은 $r-q$ 이며 주가지수 S 의 변동성이 σ 라고 할 때,

$$S = S_t \text{ 의 확률분포 :} \quad \ln S_t \sim N(\ln S_0 + (r-q-\sigma^2/2)t,\ \sigma^2 t)$$

– 주가지수 옵션의 경우 배당을 지급하는 주식에 대한 옵션의 경우와 동일한 방법

$$c_0 = S_0\, e^{-qT}\, \Phi(d_1) - K\, e^{-rT}\, \Phi(d_2)$$

$$p_0 = K\, e^{-rT}\, \Phi(-d_2) - S_0\, e^{-qT}\, \Phi(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r-q+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r-q-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

위에서

q 연평균 배당수익률, r 무위험이자율, K 행사가격, σ 변동성

예제

KOSPI 200 지수에 대한 유러피언 콜옵션의 가격을 구하고자 한다. 현재지수는 93, KOSPI 200 지수의 변동성은 연 20%, 연속복리 무위험이자율은 연 8%d 이다. 이 때 2개월 후 만기가 돌아오고 행사가격지수가 90 인 유러피언 콜옵션의 현재 적정가격을 구하여라. 단, 지수에 포함된 주식들의 예상 배당수익률은 처음 1개월은 0.2%, 다음 1개월은 0.3% 이다

- 2개월 배당수익률 $0.2 + 0.3 = 0.5\%$ $\Rightarrow$ 연평균배당수익률 $0.5 \times 6 = 3\%$
- $S_0 = 93,\ K = 90,\ T = 2/12,\ r = 0.08,\ \sigma = 0.2,\ q = 0.03$
- $d_1 = 0.5444,\ d_2 = 0.4628 \quad \Rightarrow \quad \Phi(d_1) = 0.7069,\ \Phi(d_2) = 0.6782$
- $c_0 = S_0 e^{qT}\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) = 5.183$
- KOSPI 200 의 1 계약이 100,000 원이므로 옵션가격은 518,300 원

- 풋옵션가격을 위해서는

  $\Phi(-d_1) = 1 - \Phi(d_1),\ \Phi(-d_2) = 1 - \Phi(d_2)$ 사용

3.3.4 통화옵션 (Foreign currency option)

- 상대국 통화(달러) 1단위의 자국통화로 표시한 현물환율을 S_0(원)
- 상대국 통화의 연속복리 무위험이자율 r_f, 자국통화의 무위험이자율 r
- F_0를 상대국통화 1단위에 대한 만기 T의 자국통화의 선도가격(선도환율)
- 무차익원리에 따라 다음 식이 성립(1장 참조)

  공정거래의 선도환율 $F_0 = S_0\, e^{(r-r_f)T}$ (원)

- 위험중립가치평가에 의해 자국통화에 대한 위험중립세계에서 기대환율

$$F_0 = E_Q(S_T) \quad \text{즉,} \quad E_Q(S_T) = S_0\, e^{(r-r_f)T}$$

- σ가 환율 S의 변동성이면 $\ln S_T$는 정규분포이며 표준편차가 $\sigma\sqrt{T}$
- 만기 T이고 행사가환율 K의 외환 콜옵션 가격 c_0 :

$$c_0 = e^{-rT}\, E_Q[\max(S_T - K, 0)] = e^{-rT}\,[E_Q(S_T)\,\Phi(d_1) - K\,\Phi(d_2)]$$

- 즉, 앞 절의 배당수익률 q를 무위험이자율 r_f로 대체하면 : (예제 p116)

  외환 콜옵션 가격 : $c_0 = S_0\, e^{-r_f T}\,\Phi(d_1) - K\, e^{-rT}\,\Phi(d_2)$

  외환 풋옵션 가격 : $p_0 = K\, e^{-rT}\,\Phi(-d_2)] - S_0\, e^{-r_f T}\,\Phi(-d_1)$

3.3.5 워런트 (Warrant) 와 스톡옵션

- 워런트 (신주인수권) 와 스톡옵션 : 해당 권리의 소유자에게 미래의 일정시점에 약정된 가격으로 신주를 인수할 수 있는 권리를 부여하는 증권
  - 주식에 대한 콜옵션과 매우 유사한 구조를 가졌지만,
  - 투자자가 아니라 해당 기업에 의해서 발행된다는 점,
  - 권리의 소유자가 행사가격에 신주를 인수할 의사를 밝히는 경우 기업이 신주를 인도
  - 일반적으로 만기가 옵션보다 길다는 점에서 콜옵션과 다르다
  - 스톡옵션의 구조는 워런트와 동일하지만 그 권리가 해당 기업의 임직원에게 주는 특수성

스톡옵션의 가치 v_0

- 어느 기업의 현재 주식의 총 수가 N, 중역들에게 M 주의 스톡옵션이 부여된 경우
- 스톡옵션 1단위 보유자에게는 T 시점에서 1주당 K 의 가격으로 1주를 매입할 수 있는 권리부여
- 해당 기업의 주가를 S 라하고 스톡옵션 1단위의 가치를 $v = v(t, S)$ 라 하자

$S_T \leq K$ 인 경우

스톡옵션의 가치 : $\max(S_T - K, 0) = 0$

$S_T > K$ 인 경우

– 스톡옵션이 행사되므로 기업은 M 단위의 주식을 새로 발행하여 K 의 가격으로 양도

– 기업주식의 총 수는 $N+M$ 으로 증가하고 T 시점에서 해당 기업

$$\text{주식가격의 총액} \;:\; N\,S_T + M\,K, \quad 1\text{주의 가치} \;:\; \frac{N\,S_T + M\,K}{N+M}$$

$$\text{스톡옵션 1단위의 가치} \;:\; \frac{N\,S_T + M\,K}{N+M} - K = \frac{N}{N+M}\,(S_T - K)$$

– 위의 경우를 종합하면

$$v_T = \frac{N}{N+M}\,\max(S_T - K, 0) = \frac{N}{N+M}\,c_T$$

– 무차익원칙에 의해서

– 스톡옵션의 현재가치 : $v_0 = \dfrac{N}{N+M}\,c_0$

– 유러피언 콜옵션의 적정가격공식으로부터 얻어진 c_0 를 대입

$$v_0 = \frac{N}{N+M}\,\left[\,S_0\,e^{-qT}\,\Phi(d_1) - K\,e^{-rT}\,\Phi(d_2)\right]$$

r 은 무위험 시장할인율, q 는 연속복리 평균배당 수익율

예제 (스톡옵션 결정으로 하락하는 주식의 적정가격)

어떤 회사 주식의 총 수는 현재 1백만 주이고, 주식의 현재시장가격은 50달러이다. 이 회사 주식의 연간변동성은 25%이고, 5년 만기 무위험 시장할인율은 연속복리 연 7%라 알려졌다. 이 회사는 경영진에게 스톡옵션의 형식으로 회사의 신주 30만 주를 5년 후에 55달러에 구입할 수 있는 권리를 부여한다고 결정하였다. 향후 5년 동안 이 회사는 연속복리 연평균 2%의 배당을 지급할 것으로 예상될 때, 스톡옵션 결정으로 인하여 변동된 주식 1주의 적정가격을 구하여라.

- $S_0 = 50,\ T = 5,\ K = 55,\ r = 0.07,\ q = 0.02,\ \sigma = 0.25$
- $d_1 = \dfrac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},\quad d_2 = \dfrac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$
- 유러피언 콜옵션 공식 : $c_0 = S_0 e^{-qT}\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) = 14.18$ 달러
- 스톡옵션의 현재가치 : $v_0 = \dfrac{N}{N+M} c_0 = \dfrac{100}{100+30} 14.18 = 10.9$ 달러
- 스톡옵션의 의결로 발생하는 총 손실 : $300,000 \times 10.9 = 327$ 만 달러, 즉 주당 3.27 달러
- 따라서 변동된 적정주가는 현재주가보다 3.27달러가 하락한 46.73달러이다

3.4 다기간 이항모형

– 주가의 아항모형을 다기간으로 확장시켰을 때의 옵션가격 연구

– 다기간 이항모형의 극한으로부터 주가의 연속확률분포를 얻은 것처럼 주가의 다기간 이항모형에서 얻은 옵션가격의 극한을 취하여 블랙-숄즈 옵션공식 유도

3.4.1 이항모형과 블랙-숄즈 공식

– 주가는 매기간 동안 $u > 1$ 배만큼 상승 (확률 p) 하든지 $0 < d < 1$ 배만큰 하락한다고 가정

– 주식의 시초가를 S 라고 하자

– 2기간 후에 만기에 도달한하고 행사가격이 K 라고 하면 만기주가와 콜옵션의 만기가치 :

$$
\begin{tikzcd}
 & & u^2S \\
 & uS \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & & udS \\
 & dS \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & d^2S
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & c_{uu} \\
 & c_u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
c \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & & c_{ud} \\
 & c_d \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & c_{dd}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
&= \max(u^2S - K, 0) \\
&= \max(udS - K, 0) \\
&= \max(d^2S - K, 0)
\end{aligned}
$$

– 1기간을 Δt 라 하면 위험중립가치평가에 의해서 콜옵션의 현재적정가격 c :

$$c = e^{-2r\Delta t}\left[p^2 c_{uu} + 2p(1-p)c_{ud} + (1-p)^2 c_{dd}\right]$$

다기간 이항모형 (n 기간 후에 만기 $T = n\,\Delta t$)

– 행사가격 K 인 유러피언 콜옵션의 현재 적정가격 c :

$$c = e^{-nr\Delta t}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}\,\max(\,u^k d^{n-k}\,S - K, 0)\right]$$

– 자연수 j 를 $u^j d^{n-j} S \geq K$ 를 만족하는 최소의 자연수라고 하면

$$\max(u^k d^{n-k}S - K, 0) = \begin{cases} 0, & k < j \\ u^k d^{n-k}S - K, & k \geq j \end{cases}$$

– $e^{nr\Delta t} = e^{rT}$ 이므로 다음을 얻는다

$$\begin{aligned} c &= e^{-n\,r\Delta t}\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}\,u^k d^{n-k}\,S - e^{-rT}\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}\,K \\ &= S\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{up}{e^{r\Delta t}}\right]^k\left[\frac{d(1-p)}{e^{r\Delta t}}\right]^{n-k} - K\,e^{-rT}\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

– 한편, $pu + (1-p)d = e^{r\Delta t}$ 이므로 $\dfrac{up}{e^{r\Delta t}} + \dfrac{d(1-p)}{e^{r\Delta t}} = 1$ 이 된다.

– 함수 $\Psi_n(j,x)$ 를 아래와 같이 정의하면

$$\Psi_n(j,x) = \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

– 콜옵션의 현재가격은 다음과 같이 주어진다.

$$c = S\,\Psi_n\left(j, \frac{up}{e^{r\Delta t}}\right) - K\,e^{-rT}\,\Psi_n(j,p)$$

– 위 식에서, $n \to \infty$, 즉 $\Delta t = T/n \to 0$ 의 극한을 취하면

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n\left(j, \frac{up}{e^{r\Delta t}}\right) = \Phi(d_1), \qquad d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n(j, p) = \Phi(d_2), \qquad d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

– 그러므로 다기간 이항모형의 유러피언 콜옵션 가격에 대한 블랙-숄즈 공식을 얻게 된다

$$c = S\,\Phi(d_1) - K\,e^{-rT}\,\Phi(d_2)$$

3.4.2 콕스-로스-루빈스타인 모델

- 다기간 이항모형을 통해 무배당주식에 대한 유러피언 옵션의 현재적정가격을 추정
- 무배당주식의 가격 S, 변동성 σ, 잔존만기 T
- $\Delta t = T/n$, $t_k = kT/n$
- k 번째 기간인 $[t_{k-1}, t_k]$ 동안 주가는 S_{k-1} 에서 $S_{k-1}u$ 로 상승 또는 $S_{k-1}d$ 로 하락
- 주가가 상승할 확률이 p 라고 하면

$$S_k/S_{k-1} \text{ 의 기댓값 } : \; E\left(\frac{S_k}{S_{k-1}}\right) = pu + (1-p)d$$

- 위험중립세계에서

$$E\left(\frac{S_k}{S_{k-1}}\right) = e^{r\Delta t} \quad \Rightarrow \quad pu + (1-p)d = e^{r\Delta t} \quad \text{또는} \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Cox-Ross-Rubinstein이 제시한 방법 : $d = 1/u$를 사용

– 주어진 $r, \sigma, \Delta t$를 이용하여 p, u, d를 구하여 보자.

– 확률변수 J를 n기간 동안 주가가 상승하는 횟수라고 정의하면

$$J \sim b(n,p), \quad E(J) = np,\ Var(J) = np(1-p)$$

– 만기 $T = n\Delta t$ 시점의 주가를 S_n이라 하면

$$\ln\frac{S_n}{S_0} = J\ \ln\frac{u}{d} + n\ \ln\ d \quad \Leftarrow \quad S_n = u^J\, d^{n-J}\, S_0$$

– 따라서 다음이 만족한다

$$E\left(\ln\frac{S_n}{S_0}\right) = E(J)\ \ln\frac{u}{d} + n\ \ln\ d = n\left(p\ \ln\frac{u}{d} + \ln\ d\right),$$

$$Var\left(\ln\frac{S_n}{S_0}\right) = np(1-p)\left(\ln\frac{u}{d}\right)^2$$

– 한편, n의 값을 매우 크게 취하면 위험중립세계에서 다음이 근사적으로 만족

$$\ln\frac{S_n}{S_0} \sim N\big((r-\sigma^2/2)T,\ \sigma^2 T\big)$$

– 따라서, 다음이 만족된다

$$n\left(p\,\ln\frac{u}{d}+\ln\,d\right)\approx(r-\sigma^2/2)T,\quad np(1-p)\left(\ln\frac{u}{d}\right)^2\approx\sigma^2T$$

– $T/n=\Delta t$ 이므로 근사적으로 다음이 성립한다

$$p\,\ln\frac{u}{d}+\ln\,d=(r-\sigma^2/2)\Delta t,\quad p(1-p)\left(\ln\frac{u}{d}\right)^2=\sigma^2\,\Delta t$$

– $d=1/u$ 와 근사적으로 $(\Delta t)^2=0$ 를 사용하여 계산하면 다음을 얻는다

$\ln u=\sigma\sqrt{\Delta t}$ 또는 $u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$

– 이제 아래와 같은 식을 구할 수 있다.

$$p=\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d},\quad \text{여기서}\quad u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},\quad d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

– 위의 식을 이용하여 옵션의 가치를 각 노드에서 구할 수 있다.

– 옵션의 가치는 만기시점에서 시작하여 현재시점으로 시간을 역행해 가면서 구한다.

$$c_{k-1}=e^{-r\Delta t}(p\,c_k^{+}+(1-p)\,c_k^{-})$$

예제

> 무배당주식에 대한 유러피안 풋옵션의 가격을 구하고자 한다. 옵션의 잔여만기는 2개월, 현재주가는 40달러, 행사가격도 40달러, 무위험이자율은 연 10%, 변동성은 연 30%이다. 이 때, 현재의 옵션가격을 구하라.

– $S_0 = 40, K = 40, T = 2/12, \Delta t = 1/12, r = 0.10, \sigma = 0.30$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.0905, d = 1/u = 0.9170, e^{r\Delta t} = 1.0084$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = 0.5268,\ \ 1 - p = 0.4732$$

주가 :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 47.57 \\
 & 43.62 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
40.00 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 40.00 \\
 & 36.68 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 33.64
\end{tikzcd}$$

옵션가치 :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & c_2^1 = 0.00 \\
 & c_1^1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
c_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & c_2^2 = 0.00 \\
 & c_1^2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & c_2^3 = 6.36
\end{tikzcd}$$

– 만기 옵션가치 $c_2 = \max(K - S_2, 0)$

$$c_1^1 = e^{-r\Delta t}(p\, c_2^1 + (1-p)\, c_2^2) \qquad c_1^2 = e^{-r\Delta t}(p\, c_2^2 + (1-p)\, c_2^1) \qquad c_0 = e^{-r\Delta t}(p\, c_1^1 + (1-p)\, c_1^2)$$